Vortrag 7: Attracting and Repelling Fixed Points

Literatur: Milnor, J.: Dynamics in one complex variable. §8. Geometrically Attracting or Repelling Fixed Points.

Sei S eine RF, $f: S \to S$ holom. Fkt.,
$p \in S$ Fixpunkt von f, d.h. $f(p) = p$.

Frage: Dynamik von f in kleiner Umg. von p?
(Wie verhält sich der Orbit

$$z, f(z), f^{\circ 2}(z), f^{\circ 3}(z), \dots$$

für z aus kleiner Umg. von p?)

↳ hängt vom "multiplier" von p ab.

Def. $\forall n \in \mathbb{N}$: n-te Iterierte $f^{\circ n} := \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-mal}}$.

Def. "multiplier"

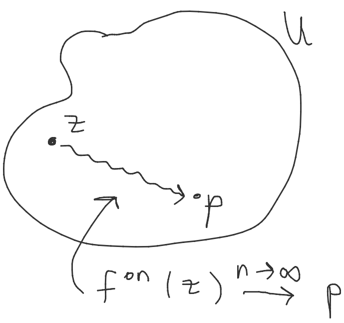
Sei $\mathcal{U} \subseteq S$ offen, s.d. $p \in \mathcal{U}$ und $\varphi: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ Karte von S.
Der multiplier von p ist def. durch $\lambda := (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))$.

Wohldef.:
- $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ ist wohldef. auf $V := \varphi(\mathcal{U} \cap f^{-1}(\mathcal{U}))$ ($V \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\varphi(p) \in V$).
- λ ist unabh. von der Wahl von φ.

Notation: Schreibe $\tilde{p} := \varphi(p)$ und $\tilde{f} := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$.
Dann ist $\tilde{f}$ holom. auf V, $\tilde{f}(\tilde{p}) = \tilde{p}$ und $\lambda = \tilde{f}'(\tilde{p})$.
↳ Untersuche Dynamik von $\tilde{f}$ in kleiner Umg. von $\tilde{p}$.

"Abuse of notation": Schreibe f statt $\tilde{f}$ & p statt $\tilde{p}$ zur Vereinf.

Def. Fixpkt. p von f heißt topologically attracting, wenn
$\exists\, \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $p \in \mathcal{U}$, s.d. $f^{\circ n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ auf ganz $\mathcal{U}$ def. ist und $f^{\circ n}|_{\mathcal{U}} \xrightarrow[\text{glm.}]{n\to\infty} \begin{matrix} \mathcal{U} \to \mathbb{C}, \\ z \mapsto p \end{matrix}$.



Lemma (Äquiv. Char. von top. attr. Fixpkt.)

Fixpkt. p von holom. f top. attr. $\Leftrightarrow$ multipl. $\lambda = f'(p)$ erfüllt $|\lambda| < 1$.

Bew.: O. E. $p = 0$, d.h. $f(0) = 0$.

(Ansonsten betr. $g(z) := f(z+p) - p$ auf Umg. von 0)

"$\Leftarrow$": Sei $|\lambda| < 1$.

Taylor-Entw. für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z|$ hinr. klein

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} z^m = 0 + \lambda z + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} z^m.$$

$\Rightarrow$ $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$ für $z \to 0$, d.h. $\exists R, K > 0$ mit

$$|f(z) - \lambda z| \leq K |z^2| \quad \forall z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} =: \mathbb{D}_R \qquad (1)$$

Nach Vor. $|\lambda| < 1$.

Wähle $c \in (|\lambda|, 1)$ und $r \in (0, R]$, s.d. $|\lambda| + Kr < c$ $\quad (*)$

$\Rightarrow$ $\forall z \in \mathbb{D}_r$ gilt

$$|f(z)| \overset{(1)}{\leq} |\lambda z| + K|z^2| = (|\lambda| + K \underbrace{|z|}_{<r}) |z| \overset{(*)}{\leq} c|z| \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ $\forall z \in \mathbb{D}_r, \forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f^{\circ n}(z)| \overset{(2)\ n\text{-mal}}{\leq} c^n |z| < c^n r \xrightarrow{n \to \infty} 0 \qquad (3)$$

$\Rightarrow$ $f^{\circ n}|_{\mathbb{D}_r} \xrightarrow[\text{glm.}]{n \to \infty} \begin{array}{l} \mathbb{D}_r \to \mathbb{C}, \\ z \mapsto 0 \end{array}$.

"$\Rightarrow$": Sei 0 top. attr. Fixpkt. von f.

$\Rightarrow$ $\exists U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $0 \in U$, s.d. $f^{\circ n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ auf ganz U def. ist und $f^{\circ n}|_U \xrightarrow[\text{glm.}]{n \to \infty} \begin{array}{l} U \to \mathbb{C}, \\ z \mapsto 0 \end{array}$.

O. E. $U = \mathbb{D}_\varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$, s.d. $f^{\circ n}(\mathbb{D}_\varepsilon) \subsetneq \mathbb{D}_\varepsilon$.

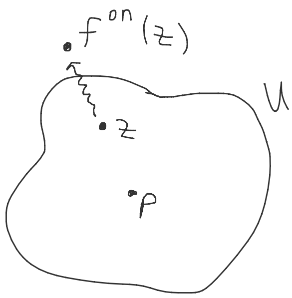
$f^{\circ n}(0)=0$ $\overset{\text{Schwarzsches Lemma}}{\Longrightarrow}$ $|(f^{\circ n})'(0)| < 1.$

$$\underset{|\lambda^n|}{\parallel}$$

$\Rightarrow \quad |\lambda| < 1.$ $\square$

Def. Fixpkt. p von holom. f und multipl. $\lambda = f'(p)$ heißt

- superattracting, falls $\lambda = 0$.
- geometrically attracting, falls $|\lambda| \in (0,1)$.
- topologically repelling, falls $|\lambda| > 1$ ($\Leftrightarrow$ $\exists\, U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $p \in U$, s.d. $\forall z \in U \setminus \{p\}$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $f^{\circ n}(z) \notin U$).



Thm. (Koenigs Linearization)
Sei $f(0) = 0$, f holom. und $\lambda = f'(0)$ mit $|\lambda| \notin \{0,1\}$.
$\Rightarrow$ $\exists\, U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $0 \in U$ und $\phi : U \to \mathbb{C}$ holom., inj.
mit $\phi(0) = 0$ und $(\phi \circ f \circ \phi^{-1})(w) = \lambda w$ $\forall w \in \mathbb{C}$ mit $|w|$ hinr. klein.
ϕ ist eind. bis auf Multipl. mit einer Konst. aus $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Exist. bew.:

- Fall 1: Falls $|\lambda| < 1$, wähle $c < 1$ mit $|\lambda| \in (c^2, c)$.
$\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $\exists\, r > 0$ mit $|f(z)| \leq c|z|$ $\forall z \in \mathbb{D}_r$.

Sei $z_0 \in \mathbb{D}_r$ bel. Startpkt. und $n \in \mathbb{N}$. Def. $z_n := f^{\circ n}(z_0) = f(z_{n-1})$
$\overset{(3)}{\Longrightarrow}$ $z_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ mit $|z_n| \leq c^n r$.
Außerdem aus (1) $\Rightarrow$ $\exists\, K > 0$ mit $|f(z) - \lambda z| \leq K\,|z^2|$ $\forall z \in \mathbb{D}_r$ (o.E.)
$\Rightarrow$ $|z_{n+1} - \lambda z_n| = |f(z_n) - \lambda z_n| \leq K\,|z_n{}^2| \leq K\,c^{2n} r^2$ $\quad (*)$
Sei $w_n := \dfrac{z_n}{\lambda^n}$

$$\Rightarrow \quad |w_{n+1} - w_n| = \frac{1}{|\lambda^{n+1}|} \, |z_{n+1} - \lambda z_n|$$

da $c^2 < |\lambda|$

$$\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{|\lambda^{n+1}|} \cdot K c^{2n} r^2 = \underbrace{\frac{K r^2}{|\lambda|}}_{\text{Konst.}} \cdot \left(\frac{c^2}{|\lambda|}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Fasse w_n $\forall n \in \mathbb{N}$ als Fkt. in $z_0 \in \mathbb{D}_r$ auf durch $z_0 \mapsto w_n(z_0) := \frac{f^{\circ n}(z_0)}{\lambda^n}$.

$\Rightarrow \quad w_n \underset{\text{glm.}}{\xrightarrow{n \to \infty}} \lim_{n \to \infty} w_n =: \phi$ auf $\mathbb{D}_r$.

w_n holom. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\underset{\text{Weierstr. Konv. Satz}}{\Longrightarrow}$ ϕ holom. auf $\mathbb{D}_r$.

Nun gilt $\forall z_0 \in \mathbb{D}_r$ $\quad \phi(z_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{f^{\circ n}(z_0)}{\lambda^n}$,

also folgt $\phi(f(z_0)) = \lim_{n \to \infty} \frac{f^{\circ(n+1)}(z_0)}{\lambda^n} = \lambda \, \phi(z_0)$

(damit kommutiert
$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}_r \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & f(\mathbb{D}_r) \arrow[d, "\phi"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\lambda\cdot"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$
)

Außerdem $w_n'(0) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\overset{\text{Weierstr. Konv. satz}}{\Longrightarrow}$ $\phi'(0) = 1 \neq 0$.

$\Rightarrow \exists \, \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $0 \in \mathcal{U}$, s.d. ϕ inj. auf $\mathcal{U}$.

• <u>Fall 2:</u> Falls $|\lambda| > 1$, ex. f^{-1} in kl. Umg. um 0 (wg. $f'(0) = \lambda \neq 0$).

$\Rightarrow$ 0 Fixpkt. von (holom.) f^{-1} mit multipl. $(f^{-1})'(0) = \lambda^{-1}$.

Es gilt $0 < |\lambda^{-1}| < 1$. $\overset{\text{Fall 1}}{\Longrightarrow}$ Beh. $\square$

<u>Nun:</u> Sei S RF, $f: S \to S$ holom., $p \in S$ Fixpkt. von f mit multipl. λ, s.d. $0 < |\lambda| < 1$.

<u>Def.</u>

- <u>basin of attraction</u> $\underline{\mathcal{A}} := \underline{\mathcal{A}(p)} := \{\hat{p} \in S \mid \lim_{n \to \infty} f^{\circ n}(\hat{p}) = p\}$.
- <u>immediate basin</u> $\underline{\mathcal{A}_0} \subseteq \mathcal{A}$:
  $\mathcal{A}_0$ ist die Zshgskomp. von $\mathcal{A}$ mit $p \in \mathcal{A}_0$.

Kor. (Global linearization)

$\exists$ holom. $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit $\phi(p) = 0$, s.d.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{A} \arrow[d, "\phi"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\lambda \cdot"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

kommutiert und $\exists$ Umg. von p, die ϕ biholom. auf eine Umg. um 0 abb.
ϕ eind. bis auf Multipl. mit einer Konst. aus $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

<u>Bew.</u>: Aus (dem Bew. von) Koenigs Linearization Thm. $\square$