Visualizing Fatou and Julia sets

Marcel Stoklasa

10. Juni 2021

1 Einleitung

2 Orbits

2.1 Iteration

Für eine Funktion F schreiben wir die zweite Iteration dieser Funktion als $F^2(z) := F(F(z))$ und folglich die n-te Iteration als $F^n(z)$.

2.2 Beispiel: $f_{-2}(z) = z^2 - 2$

$$
\begin{aligned}
&f_{-2}(z) = z^2 - 2 \\
&f_{-2}^2(z) = (z^2 - 2)^2 - 2 = z^4 - 4z^2 + 2 \\
&f_{-2}^3(z) = ((z^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2 = z^8 - 8z^6 + 20z^4 - 16z^2 + 2 \\
&\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

2.3 Orbit

Für ein gegebenes $z_0 \in \mathbb{C}$ definieren wir den Orbit von z_0 unter F, als die Folge der Punkte $z_0, z_1 = F(z_0), z_2 = F^2(z_0), ...$ Dabei ist z_0 der *Keim* des Orbits.

2.4 Bespiel: $f_{-2}(z) = z^2 - 2$ mit $z_0 = 0.1$

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 0.1 \\
z_1 &= -1.99 \\
z_2 &= 1.9601 \\
z_3 &= 1.84199201 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

2.5 Typen von Orbits

2.5.1 Fixpunkte (Konstante Orbits)

Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ nennen wir einen Fixpunkt für die Funktion F, wenn er die Gleichung $F(z_0) = z_0$ erfüllt. Der Orbit für diesen Punkt ist offensichtlich die konstante Folge $z_0, z_0, z_0, ...$

2.5.2 Beispiel: Fixpunkte

2.5.3 Periodische Orbits

Ein Orbit heißt periodisch, wenn für F und z_0 ein $n > 0$ existiert, sodass $F^n(z_0) = z_0$. Somit ergibt sich für den Orbit diese Folge $z_0, z_1, ..., z_{n-1}, z_0, z_1, ...$, daraus folgt sofort, dass die Orbits für alle z_i mit $i \in \{0, 1, ..., n-2, n-1\}$ periodisch mit Periodenlänge n sind.

2.5.4 Beispiel: Periodische Orbits

2.5.5 Fast Fixpunkte (Fast Konstante Orbits) bzw. Fast Periodische Orbits

Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist ein fast Fixpunkt bzw. hat einen fast periodischen Orbit, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass z_n ein Fixpunkt ist bzw. z_n einen periodischen Orbit hat.

2.5.6 Chaotische Orbits

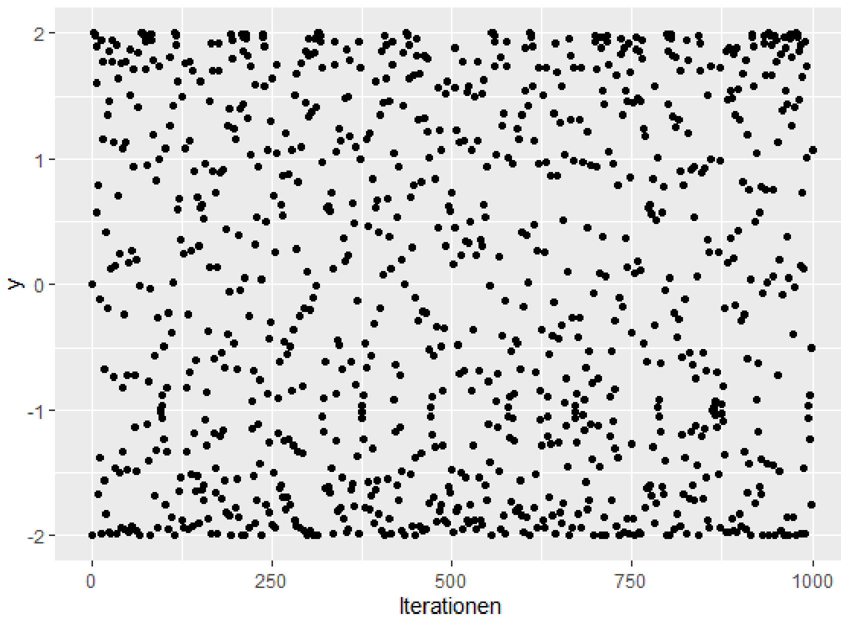

Abbildung 1: Chaotischer Orbit

2.6 Numerische Probleme

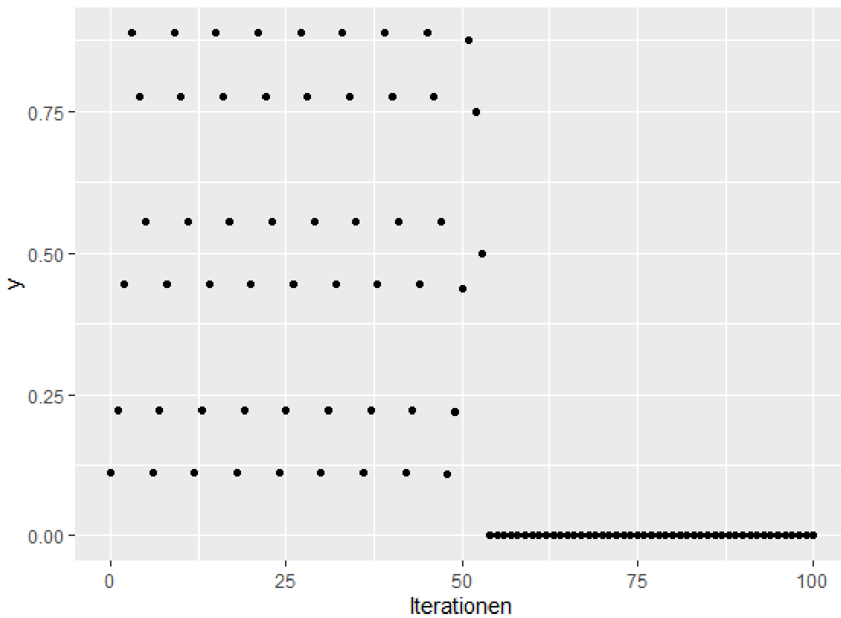

Abbildung 2: numerische Probleme

Orbit von $x_0 = \frac{1}{9}$ ist $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{1}{9}, ...$ unter der Verdopplung-Funktion.

3 Fatou und Julia Menge

3.1 Supersensitive Orbits

Der Orbit eines Punktes z unter f_c ist supersensitiv, wenn jede offene Umgebung U_z die folgende Eigenschaft hat:

$$|\mathbb{C} - \bigcup_{n=1}^{\infty} f_c^n(U_z)| \leq 1$$

3.2 Julia Menge als Menge supersensitiver Orbits

Ein Punkt z gehört für eine Funktion f_c zu der Julia Menge $J_c := J(f_c)$, wenn er unter f_c ein Punkt mit supersensitivem Orbit ist.

3.3 Fatou Menge

Die Fatou Menge für eine Funktion f_c ist gegeben als $F_c := F(f_c) = \mathbb{C} - J(f_c)$.

3.4 Beispiel: $f_0(z) = z^2$

Um die Funktion f_0 leichter untersuchen zu können, benutzen für $z_0 \in \mathbb{C}$ die Darstellung $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, mit $r_0 = |z_0|$ und geeignetem $\theta_0 \in (0, 2\pi]$.Dann ergibt sich für den Orbit von z_0:

$$\begin{aligned}
z_0 &= r_0 e^{i\theta_0} \\
z_1 &= r_0^2 e^{2i\theta_0} \\
z_2 &= r_0^4 e^{4i\theta_0} \\
&. \\
&. \\
&. \\
z_n &= r_0^{2^n} e^{2^n i\theta_0} \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich drei Möglichkeiten für das Verhalten für den Orbit von z_0.

3.5 Beschränkte Orbits

Der Orbit eines Punktes z unter f_c ist beschränkt, wenn ein $K \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $|f_c^n(z)| < K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.6 Die Ausgefüllte Julia Menge

Ein Punkt z gehört unter der Funktion f_c zur ausgefüllten Julia Menge $K_c := K(f_c)$, wenn sein Orbit beschränkt ist.

3.6.1 Bemerkung

3.7 Julia Menge als Rand

Wir können die Julia Menge auch als Rand der ausgefüllten Julia Menge definieren, also $J_c := \partial K_c$. Wir werden in einem anderen Vortag sehen, dass die beiden Definitionen für die Julia Menge äquivalent sind.

3.8 Beispiel: $f_{-2}(z) = z^2 - 2$

3.8.1 Konjugierte Dynamische Systeme

Es seien X und Y zwei metrische Räume und $f : X \to X$ sowie $g : Y \to Y$ zwei stetige Abbildungen, dann heißen f und g konjugiert, wenn es einen Homöomorphismus $H : X \to Y$ gibt, sodass:

$$h \circ f = g \circ h$$

Diese Abbildung erhält den Typ eines Orbits.

3.8.2 Beweis: $J_{-2} = [-2, 2]$

Um die Julia Menge für diese Funktion zu bestimmen, zeigen wir zuerst, dass f_{-2} auf $\mathbb{C} - [-2, 2]$ konjugiert zu f_0 auf $R := \{z | 1 < |z|\}$ ist und somit, dass der Orbit für alle Punkte, die nicht in $[-2, 2]$ unter f_{-2} nicht beschränkt ist. Dafür definieren wir uns eine Funktion $H(z) := z + \frac{1}{z}$ auf R.

3.9 Bemerkung

4 Algorithmus Ausgefüllte Julia Menge

4.1 Escape-Kriterium

Ist $|z| > \max\{|c|, 2\}$, dann $|f_c^n(z)| \to \infty$ für $n \to \infty$.

4.2 Algorithmus

Wir wählen eine maximale Anzahl an Iterationen N und geben uns ein Gitter Γ an Punkten vor. Für jeden Punkt $z \in \Gamma$ aus dem Gitter berechnen wir die ersten N Punkte aus dem Orbit, wenn gilt $|f_c^n(z)| > \max\{|c|, 2\}$ färben wir den Punkt weiß und wenn gilt $|f_c^n(z)| \leq \max\{|c|, 2\}$ färben wir den Punkt schwarz. Die schwarzen Punkte geben uns dann eine Approximation der ausgefüllten Julia Menge.

4.3 Beispiele

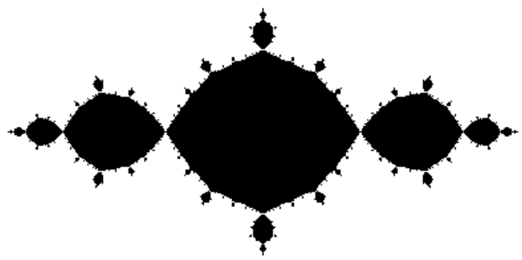

Abbildung 3: $c = -1$

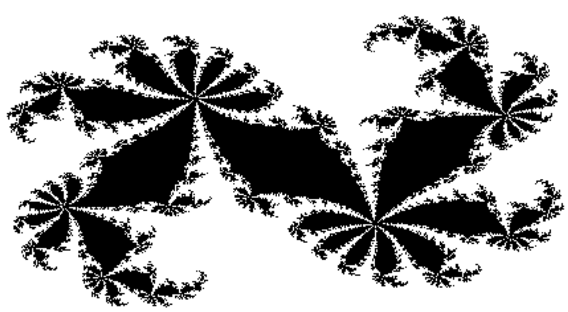

Abbildung 4: $c = 0.360284 + 0.100376i$

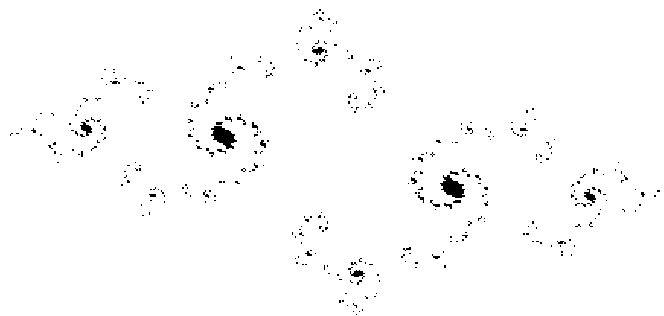

Abbildung 5: $c = -0.8 + 0.3i$

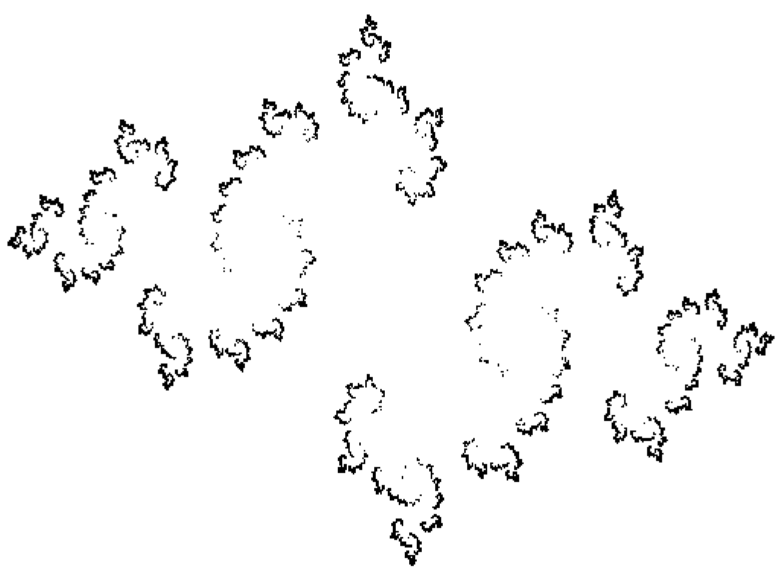

Abbildung 6: $c = -0.8 + 0.3i$

4.4 Bemerkungen

5 Algorithmus Julia Menge

5.1 Instabil\Stabil\Indifferent Periodische Punkte

Sei f_c eine quadratische Funktion und z_0 ein Punkt mit periodischem Orbit und Periodenlänge n, dann ist dieser Punkt:
1. instabil periodisch, wenn $|(f_c^n)'(z_0)| > 1$.
2. stabil periodisch, wenn $|(f_c^n)'(z_0)| < 1$.
3. indifferent periodisch, wenn $|(f_c^n)'(z_0)| = 1$.

5.2 Eigenschaften Stabil\Instabil Periodische Punkte

Sei z_0 ein Punkt mit periodischem Orbit unter f_c mit Periodenlänge n, dann existiert eine Scheibe D der Form $|z - z_0| < \delta$ um z_0 mit Eigenschaft:

$$(i)\ z_0\ stabil \Rightarrow \forall z \in D : f_c(z) \in D, f_c^{nk}(z) \to z_0 \text{ für } k \to \infty$$
$$(ii)\ z_0\ instabil \Rightarrow \forall z \in D - \{z_0\}\ \exists k \in \mathbb{N} : f_c^{nk}(z) \notin D$$

5.2.1 Bemerkung

5.3 Boundary Mapping Principle

Sei $R \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und z_0 ein innerer Punkt von R, dann ist $f_c(z_0)$ ein innerer Punkt von $f_c(R)$.
Beweis: Da die Eigenschaft translationsinvariant ist, reicht es f_0 zu betrachten. Der Rest folgt durch Anpassung des Beweises aus Abschnitt 3.4.

5.4 Cauchy Abschätzung (für Ableitungen)

Sei $P(z)$ ein komplexes Polynom und $|P(z)| \leq M$ für alle z aus der Scheibe $|z - z_0| \leq r$, dann gilt:

$$|P'(z)| < \frac{M}{r}$$

Beweis: Funktionentheorie 1

5.5 Instabile Periodische Punkte liegen in der Julia Menge

Sie z_0 ein instabiler periodischer Punkt zu f_c, dann $z_0 \in J_c$.

5.6 Korollar: Urbilder von z_0 liegen in der Julia Menge

Sei z_0 ein instabiler periodischer Punkt für f_c und z sei ein Urbild von z_0, dann $z \in J_c$.
BEWEIS: Der Beweis folgt direkt aus dem vorigen Satz und dem Boundary Mapping Principle.

5.7 Beispiel: $f_i(z) = z^2 + i$

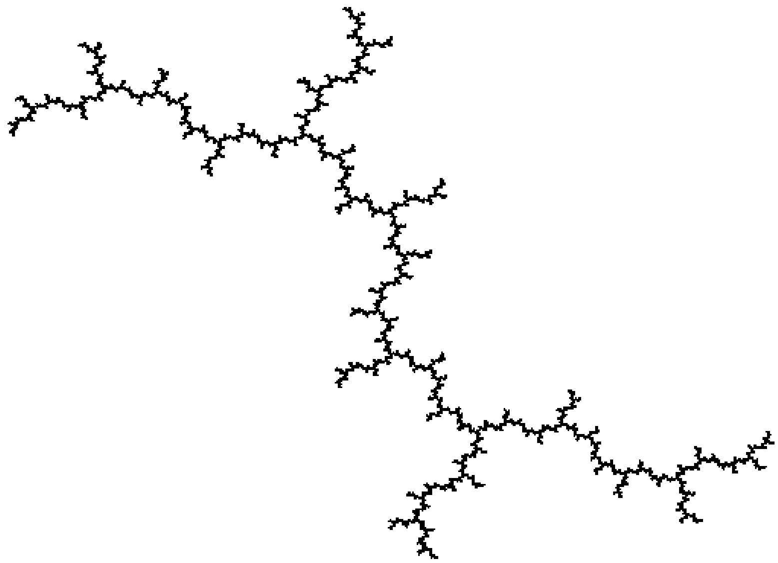

Abbildung 7: $c = i$

5.8 Algorithmus

Der zweite Algorithmus beruht darauf, dass J_c supersensitiv unter f_c ist. Wähle ein $z \in \mathbb{C}$ beliebig bis auf maximal eine Ausnahme und ein Punkt $z_0 \in J_c$, dann gibt es wegen der Supersensitivität ein $w \in U_{z_0}$ und ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $f_c^k(w) = z$. Das bedeuten wir können mit einem beliebigen z mit einem ausreichend großen k durch das Urbild $f_c^{-k}(z)$ beliebig nah an jeden Punkt aus J_c kommen.
Um nun also Punkte aus J_c zu bestimmen wählen wir ein $c \in \mathbb{C}$ und berechnen das "Rückwärts Orbit", da jeder Punkt bis auf c zwei Mögliche Urbilder ($\pm\sqrt{z-c}$) hat wählen wir in jeden Schritt zufällig eins davon.
Um ein gutes Bild von J_c zu bekommen, berechnen wir ca. die ersten 10.000 Urbilder und plotten alle bis auf die ersten 100 Punkte.

5.9 Beispiele

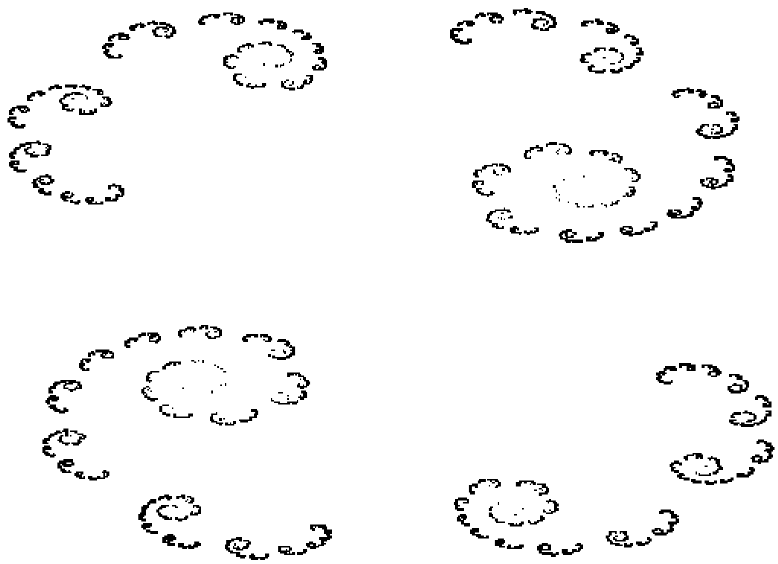

Abbildung 8: $c = 0.4 + 0.07i$

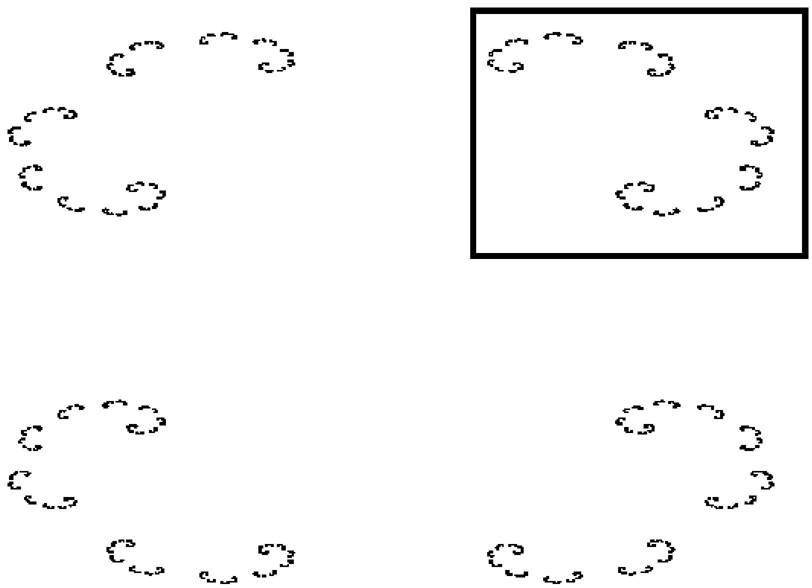

Abbildung 9: $c = 0.5$

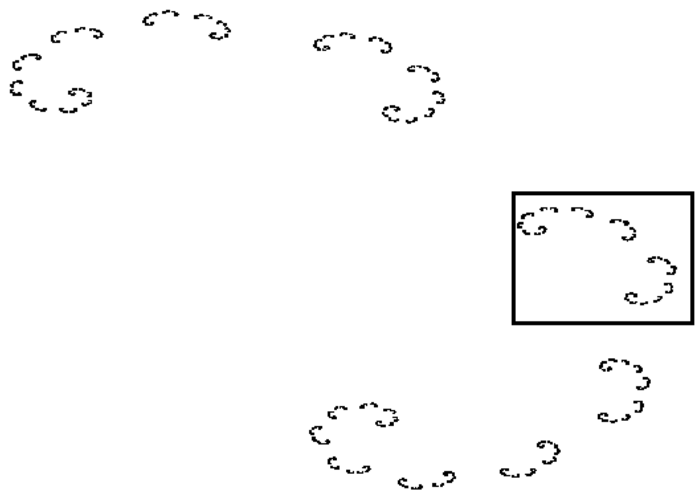

Abbildung 10: $c = 0.5$

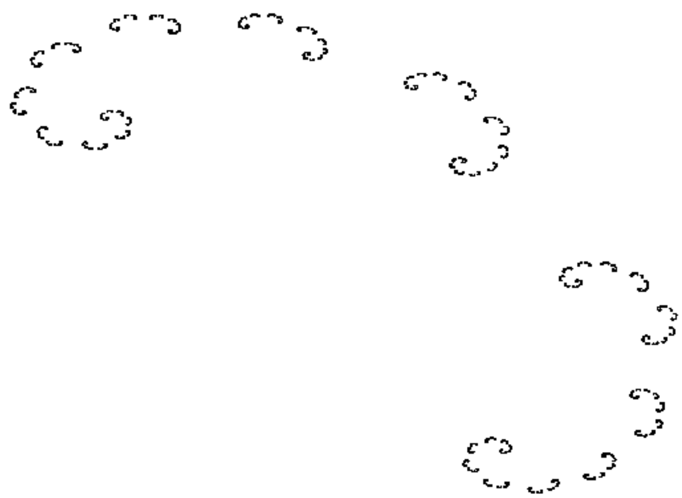

Abbildung 11: $c = 0.5$

6 Selbstähnlichkeit

Mit der Ausnahme von ein paar besonderen Ausnahmen sind alle Formen, die man in einer Julia Menge erkennt unendlich oft zu finden.

6.1 Lokal Ähnlich als Holomorphe Bijektion

Wir nennen zwei Punkte $z, z' \in J_c$ lokal ähnlich, wenn es zwischen den Umgebungen U_z und $U_{z'}$ eine holomorphe Bijektion ϕ gibt der mit der Eigenschaft $\phi(z) = z'$ und $\phi(U_z \cap J_c) = U_{z'} \cap J_c$.

6.2 Lokal Ähnlich als Ableitung

Für $z \in J_c - \{0\}$ und $f_c'(z) \neq 0$ sind $z, f_c(z)$ lokal ähnlich. $\Rightarrow$ Alle Punkte $f_c^{-1}(z), f_c^{-2}(z), f_c^{-3}(z), ...$ sind lokal ähnlich, wenn $0 \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_c^{-k}(z)$.
Bemerkung: Die Menge $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_c^{-k}(z)$ liegt dicht in J_c.

6.3 Beispiele

Für $c = i$ und $c = -2$ ist $0 \in J_c$, daher gibt es Punkte, die nicht zu unendlich vielen anderen Punkten lokal ähnlich sind.
Für $J_{-2} = [-2, 2]$ sind 2 und -2 nicht lokal ähnlich zu anderen Punkten.