

Seminar: Integrable Hamiltonsche Systeme und das KAM-Theorem

Vortrag 8: Arnold-Jost-Liouville Theorem

Raphael Schlarb

23.01.2019

1 Einführung

Im Vortrag über vollständige Integrabilität vom 21.01.2019 haben wir vollständig kanonisch integrable Hamiltonsche Systeme untersucht. Verallgemeinert, beschreiben wir ein solches vollständig kanonisch integrables System als eine abstrakte symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) mit $\dim(M) = 2n$ und einem (Liouville-)Integrablen Hamilton-Vektorfeld X_H für die ein symplektischer Diffeomorphismus (auch Symplektomorphismus genannt) $\phi : (T^n \times \mathbb{R}^n, \omega_{Std}) \rightarrow (M, \omega)$ existiert, so dass die neue Hamilton-Funktion h unabhängig von der Winkelkoordinate x ist. Also

$$H \circ \phi(x, y) = h(y).$$

Die Koordinaten $(x, y) \in T^n \times \mathbb{R}^n$ werden auch Wirkungs-Winkelkoordinaten genannt. Mit ω_{std} wird die standard symplektische Form bezeichnet und ein Integrables Hamilton-Vektorfeld ist wie folgt definiert.

Definition 1. *Ein Hamilton-Vektorfeld X_H auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) ist Integrabel (Im Sinne von Liouville), wenn es n Funktionen $F_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die auf ganz M folgende Eigenschaften erfüllen:*

- (i) dF_1, \dots, dF_n sind linear unabhängig.
- (ii) $\{F_i, F_j\} = 0$ für alle i, j .
- (iii) $\{H, F_j\} = 0$ für alle j .

Wobei $\{.,.\}$ die Poisson-Klammer ist.

In diesem Vortrag werden wir sehen, dass wir unter einer zusätzlichen Bedingung zumindest lokal einen solchen Symplektomorphismus ϕ finden können.

Wir setzen:

$$F(x) := (F_1(x), \dots, F_n(x))$$

und betrachten die Niveaumengen

$$N_c := F^{-1}(\{c\}), \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Mit (i) folgt dann, mittels des Satzes vom regulären Wert, dass N_c eine Untermannigfaltigkeit ist. Die Hamilton-Vektorfelder X_{F_j} sind linear unabhängig und aus (ii) folgt $dF_i(X_{F_j}) = 0$ und somit

$$T_p N_c := \text{span}\{ X_{F_j}(x) \mid 1 \leq j \leq n \}.$$

2 Das Liouville-Arnold-Jost Theorem

Formulierung und Beweis des Theorems sind aus [1] entnommen.

Theorem 1. *Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit mit $\dim(M) = 2n$ und F_1, \dots, F_n Funktionen, die (i) und (ii) erfüllen. Sei außerdem $N = F^{-1}(0)$ kompakt und zusammenhängend, dann gilt:*

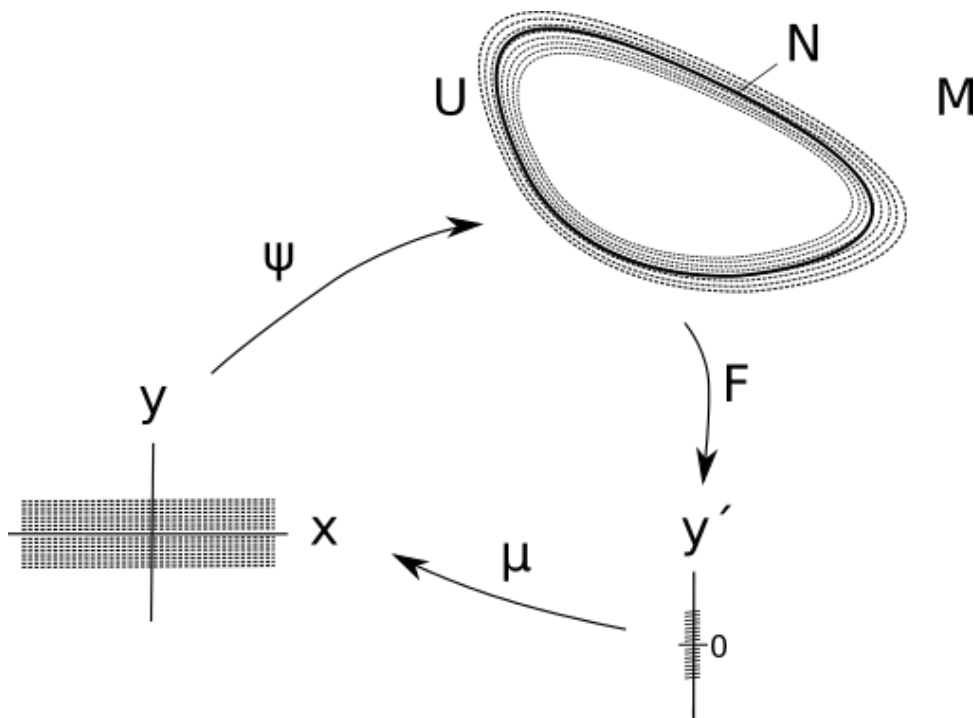
1. *N ist ein eingebetteter n -dimensionaler Torus T^n .*
2. *Es gibt eine offene Umgebung U von N in M , Gebiete $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$, welche jeweils den Nullpunkt enthalten, und einen Symplektomorphismus*

$$\psi : (T^n \times D_1, \omega_{Std}) \rightarrow (U, \omega), \text{ mit } U = \bigcup_{c \in D_2} (F^{-1}(c) \cap U)$$

sowie einen Diffeomorphismus $\mu : D_2 \rightarrow D_1$, mit $\mu(0) = 0$, so dass

$$\mu \circ F \circ \psi(x, y) = y \tag{1}$$

Dabei bildet ψ den Torus $T^n \times \{0\}$ diffeomorph auf N und den Torus $T^n \times \{y\}$ auf $F^{-1}(c) \cap U$ ab. Wobei $\mu(c) = y$.



Korollar 1. *Jedes integrable System mit Hamilton-Funktion H wird durch den obigen Symplektomorphismus ψ in folgendes System auf $(T^n \times D_1, \omega_{std})$ transformiert:*

$$H \circ \psi(x, y) = h(y).$$

Die Hamilton-Funktion in unserem transformierten System hängt somit nicht mehr von der Winkelkoordinate ab.

Proof. Wir rechnen

$$\{H, \mu_i \circ F\} = -d(\mu_i \circ F)(X_H) = -\sum_j \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} dF_j(X_H) = -\sum_j \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} \{F_j, X_H\} = 0$$

Die letzte Gleichheit folgt aus (iii) der Definition 1 und da X_H ein integrables Hamilton-Vektorfeld ist. Wir haben außerdem $\{H \circ \psi, \mu_i \circ F \circ \psi\} = \{H, \mu_i \circ F\} \circ \psi$ und bekommen damit, unter Beachtung von (1):

$$0 = \{H \circ \psi, \mu_i \circ F \circ \psi\} = \{h, y_i\} = \sum_k \frac{\partial h}{\partial x_k} \frac{\partial y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial h}{\partial y_k} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

für alle $0 \leq i \leq n$ □

2.1 Beweis des Theorems

2.1.1 Beweisskizze

Der Beweis gliedert sich in mehrere Schritte. Im ersten Schritt werden wir zeigen, dass $N = F^{-1}(0)$ ein Torus ist. Im zweiten Schritt finden wir geeignete Koordinaten einer Umgebung eines Punktes $p \in N$, so dass die Flüsse in dieser der Hamilton-Vektorfelder X_{F_j} durch die x -Koordinate parametrisiert werden. Im dritten Schritt werden wir diese Koordinaten, mithilfe der Flüsse der Hamilton-Vektorfelder, auf eine Umgebung von N fortsetzen. Da sich die Perioden der Flüsse jedoch unterscheiden können müssen wir diese in einem letzten vierten Schritt noch normieren.

2.1.2 Schritt 1 - N ist ein n -dimensionaler Torus

Bezeichne mit $\varphi_i^{s_i}$ der Fluss von X_{F_i} . Da $\{F_i, F_j\} = 0$ kommutieren die Flüsse der Vektorfelder X_{F_i} und X_{F_j} (Siehe dazu den Vortrag über Symmetrien und Erhaltungsgrößen vom 16.01.2019). Wenn definiert, dann kürzen wir die Hintereinanderschaltung der Flüsse ab und schreiben

$$\varphi^s = \varphi_1^{s_1} \circ \varphi_2^{s_2} \circ \dots \circ \varphi_n^{s_n}, \quad s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Man sieht leicht, dass $\varphi^{s+t} = \varphi^s \circ \varphi^t$. Da die F_j Integrale der X_j sind, gilt

$$F(\varphi^s(x)) = F(x), \quad x \in M \quad (3)$$

und somit lässt φ^s die Niveaumengen $N_c = F^{-1}(0) \subset M$ invariant. Wir fixieren jetzt einen Punkt $p \in N$. Aus der Annahme, dass N kompakt ist folgt nun, dass φ^s für alle $s \in \mathbb{R}^n$ definiert ist. Somit können wir folgende Wirkung von \mathbb{R}^n auf N definieren:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\rightarrow N \\ s &\mapsto \varphi^s(p). \end{aligned}$$

Die Abbildung A ist ein lokaler Diffeomorphismus da, unter Beachtung der Kommutativität der Flüsse,

$$(dA)_s(e_i) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\varphi_1^{s_1} \circ \dots \circ \varphi_i^{s_i+t} \circ \dots \circ \varphi_n^{s_n}(p)) = X_i(\varphi^s(p)). \quad (4)$$

Aufgrund von (i) ist also das Differential von A surjektiv und der Satz vom regulären Wert liefert, dass A lokal diffeomorph ist. Außerdem ist A surjektiv, da das Bild von A offen und abgeschlossen ist. Offenheit folgt direkt daraus, dass A ein lokaler Diffeomorphismus ist. Um Abgeschlossenheit zu sehen wählt man einen Punkt aus dem Rand $q \in \partial \text{Bild}(A)$. Die Abbildung $s \mapsto \varphi^s(q)$ ist dann, mit der selben Argumentation wie bei A , ein lokaler Diffeomorphismus. Dann müssen sich aber die Bilder von A und $s \mapsto \varphi^s(q)$ schneiden und wir finden somit ein $q_0 \in \overline{\text{Bild}(A)}$ mit $\varphi^{s_1}(p) = q_0 = \varphi^{s_2}(q)$ und bekommen $A(s_1 - s_2) = q$. Das heißt, dass $\overline{\text{Bild}(A)} = \text{Bild}(A)$ und wir bekommen, gemeinsam mit der Offenheit des Bildes, dass A surjektiv ist.

Die Abbildung A ist allerdings nicht injektiv, denn sonst wäre A bereits ein Diffeomorphismus, was aber aufgrund der Kompaktheit von N nicht möglich ist.

Wir betrachten nun die Menge $\Gamma := \{s \in \mathbb{R}^n | \varphi^s(p) = p\}$, welche eine diskrete Untergruppe von \mathbb{R}^n ist. Eine solche Untergruppe wird auch als Gitter bezeichnet. Diskretheit folgt aus der lokalen Diffeomorphie von A und die Gruppenaxiome kann man leicht überprüfen. Man kann k linear unabhängige Vektoren $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R}^n$ finden, so dass

$$\Gamma = \{\gamma = \sum_j^k n_j \gamma_j \mid n_j \in \mathbb{Z}\}. \quad (5)$$

Ein Beweis dieser Aussage findet sich in [2]. Die Abbildung A induziert jetzt einen Diffeomorphismus

$$A : \mathbb{R}^n / \Gamma \rightarrow N \quad (6)$$

und folglich $k = n$, da sonst \mathbb{R}^n / Γ nicht kompakt wäre. $\square_{\text{Schritt 1}}$

2.1.3 Schritt 2 - Lokale Koordinaten um $p \in N$

Lemma 1. *Liouville Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit mit $\dim(M) = 2n$ mit n Funktionen F_j , so dass $\{F_i, F_j\} = 0$ und die Differentiale dF_j linear unabhängig sind, dann hat jeder Punkt $q \in M$ eine offene Umgebung W und es existiert ein Diffeomorphismus $\phi : V \rightarrow W$, wobei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung des Ursprungs ist, so dass*

$$(i) \quad \phi(0) = q$$

$$(ii) \quad \phi^* \omega = \omega_{std}$$

$$(iii) \quad F \circ \phi(x, y) = y$$

Proof. Mit Darboux erhalten wir einen symplektischen Diffeomorphismus $\phi_{Darboux}$, der bereits die ersten zwei Bedingungen erfüllt. Das Liouville Theorem aus dem Vortrag über erzeugende Funktionen vom 14.01.2019 besagt dann, dass es einen lokalen symplektischen Diffeomorphismus $\varphi(\xi, \eta) = (G(\xi, \eta), F \circ \phi_{Darboux}(\xi, \eta))$ gibt, mit

$$x = G(\xi, \eta)$$

$$y = F \circ \phi_{Darboux}(\xi, \eta)$$

und der $F \circ \phi_{Darboux}(\xi, \eta)$ fortsetzt. Damit bekommen wir $y = F \circ \phi_{Darboux} \circ \varphi^{-1}(x, y)$ und wir definieren unseren neuen symplektischen Diffeomorphismus entsprechend

$$\phi := \phi_{Darboux} \circ \varphi^{-1}.$$

□

Korollar 2. *In den obigen "Liouville"-Koordinaten vereinfacht sich der, bei (2) definierte, Fluss φ^s erheblich. Es gilt nämlich*

$$\varphi^s \circ \phi(x, y) = \phi(x + s, y). \quad (7)$$

Proof. Die Abbildung $\phi^{-1} \circ \varphi_j^{s_j} \circ \phi$ ist der Fluss von $X_{F_j \circ \phi} = X_{y_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Die erste Gleichheit folgt aus dritten Eigenschaft (iii) der Liouville Koordinaten. □

Damit haben wir geeignete lokale Koordinaten gefunden, mit denen der Fluss φ^s durch die x -Koordinate parametrisiert wird. □_{Schritt 2}

2.1.4 Schritt 3 - Erweitern der lokalen Koordinaten auf ganz N

Für einen beliebigen Punkt $p \in N$ wählen wir unsere, in Schritt 2 definierten, Liouville-Koordinaten $\phi : V \rightarrow U \subset M$, wobei V eine offene Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ ist und $\phi(0) = p$. Um Koordinaten für ganz N zu bekommen betrachten wir nun die Abbildung

$$\begin{aligned}\vartheta : \mathbb{R}^n \times D_2 &\rightarrow M \\ (x, y) &\mapsto \vartheta(x, y) = \varphi^x \circ \phi(0, y),\end{aligned}$$

wobei ϕ^x der bei (2) definierte Fluss der Integrale der X_{F_j} ist und $D_2 \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $y = 0$. Dabei ist nicht klar, dass die Flüsse überhaupt definiert sind, weshalb wir noch ein paar weitere Überlegungen anstellen müssen. Beachte, dass $\vartheta(x, y) = \phi(x, y)$ für $(x, y) \in V$. Da außerdem $F \circ \varphi^x = F$, folgern wir aus Lemma 2 (iii), dass $F(\vartheta(x, y)) = F(\varphi^x \circ \phi(0, y)) = F(\phi(0, y)) = y$ und somit

$$\vartheta : \mathbb{R}^n \times \{y\} \rightarrow F^{-1}(y),$$

wenn die Abbildung definiert ist. Wenn $y = 0$, dann haben wir, mit $\phi(0, 0) = p$, dass $\vartheta(x, 0) = \varphi^x(p)$ und die Abbildung ist, mit den Überlegungen aus Schritt 1, für alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert und bildet $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ auf $N = F^{-1}(0)$ ab. Da die Lösungen von ODE's stetig von deren Anfangsbedingungen abhängen, können wir D_2 so klein wählen, dass die Abbildung ϑ auf $K \times D_2$ definiert ist, wobei K eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist, die die Basisvektoren des Gitters Γ aus Schritt 1 im Inneren enthält.

Wir wollen jetzt zeigen, dass ϑ eigentlich auf $\mathbb{R}^n \times D_2$ definiert ist. Wir erinnern uns, dass $\vartheta(x + \gamma, 0) = \vartheta(x, 0)$ für $\gamma \in \Gamma$ und wollen nun eine Familie von Gittern $\Gamma(y)$ konstruieren, so dass $\vartheta(x + \gamma_y, y) = \vartheta(x, y)$, für $\gamma_y \in \Gamma(y)$.

Sei $\gamma = \gamma_j \in \Gamma$ ein beliebiger Basisvektor für das Gitter Γ aus Schritt 1. Dann $\varphi^\gamma(p) = p$ und $p = \phi(0)$.

In Liouville Koordinaten $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ wird durch

$$\phi^{-1} \circ \varphi^\gamma \circ \phi : (x, y) \mapsto (\xi, \eta)$$

ein Symplektomorphismus lokal nahe am Fixpunkt $0 \in V$ definiert. Aus der Proposition 8 aus dem Vortrag über erzeugende Funktionen vom 14.01.2019 wissen wir, dass der obige Symplektomorphismus lokal in folgender impliziter Form beschrieben werden kann

$$\begin{aligned}x &= \frac{\partial}{\partial y} V \\ \eta &= \frac{\partial}{\partial \xi} V,\end{aligned}$$

wobei $V = V(y, \xi)$ eine glatte Funktion ist. Wir haben nun aber, unter Beachten von Lemma 2 (iii) und (3) aus Schritt 1, dass

$$\eta = F \circ \phi(\xi, \eta) = F \circ \varphi^\gamma \circ \phi(x, y) = F \circ \phi(x, y) = y.$$

Somit $V(y, \xi) = y\xi + Q(y)$, für eine glatte Funktion Q mit $Q(0) = 0$ und es folgt

$$\xi = x - \frac{\partial}{\partial y}Q$$

und $\frac{\partial}{\partial y}Q(0) = 0$. Wir hatten $\gamma = \gamma_j$ gewählt. Für jeden Basisvektor γ_j ergibt sich die selbe Situation und wir erhalten glatte Funktionen Q_j , so dass

$$\varphi^{\gamma_j} \circ \phi(x, y) = \phi(x - \frac{\partial}{\partial y}Q_j, y).$$

Als Basisvektoren der $\Gamma(y)$ definieren wir $\gamma_j(y) := \gamma_j + \frac{\partial}{\partial y}Q_j(y)$ und

$$\Gamma(y) := \left\{ \gamma(y) = \sum_k \gamma_k(y)n_k \mid n_k \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (8)$$

Aufgrund von $\frac{\partial}{\partial y}Q_j(0) = 0$ haben wir $\Gamma(0) = \Gamma$. Für y nahe $0 \in V$ sind die Basisvektoren somit $\gamma_j(y)$ linear unabhängig und unter Beachtung von (7)

$$\varphi^{\gamma_j(y)} \circ \phi(x, y) = \varphi^{\gamma_j + \frac{\partial}{\partial y}Q_j(y)} \circ \phi(x, y) = \varphi^{\gamma_j} \circ \phi(x + \frac{\partial}{\partial y}Q_j(y), y) = \phi(x, y)$$

für $(x, y) \in V' \subset V$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass ϑ nun auf ganz $\mathbb{R}^n \times D_2$ definiert ist.

Wir erinnern uns, dass ϑ für $(x, y) \in K \times D_2$ definiert ist, wobei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge ist, die die Basisvektoren von $\Gamma(0)$ im Inneren enthält. Für D_2 klein genug und x nahe 0 haben wir dann

$$\begin{aligned}\vartheta(x + \gamma_j(y), y) &= \varphi^{x+\gamma_j(y)} \circ \phi(0, y) \\ &= \varphi^x \circ \varphi^{\gamma_j(y)} \circ \phi(0, y) \\ &= \varphi^x \circ \phi(0, y) = \vartheta(x, y).\end{aligned}$$

Damit ist ϑ nach einer Folgerung der Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen für alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert. Zu zeigen bleibt noch, dass ϑ ein Symplektomorphismus ist. Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times D_2$, wir wählen x_0 nahe bei x , so dass $x - x_0 \in V$ und repräsentieren ϑ in folgender Form:

$$\begin{aligned}\vartheta(x, y) &= \varphi^{x_0+x-x_0} \circ \phi(0, y) \\ &= \varphi^{x_0} \circ \varphi^{x-x_0} \circ \phi(0, y) \\ &= \varphi^{x_0} \circ \phi(x - x_0, y) = \varphi^{x_0} \circ \phi \circ \sigma(x, y),\end{aligned}$$

wobei $\sigma(x, y) = (x - x_0, y)$. Die Abbildung ϑ ist damit als Komposition von Symplektomorphismen selbst ein Symplektomorphismus.

Wir erinnern uns, dass $\vartheta(\mathbb{R}^n \times \{y\}) \subset F^{-1}(y)$ und behaupten nun, dass ϑ einen Diffeomorphismus

$$\vartheta_0 : \mathbb{R}^n / \Gamma(y) \rightarrow F^{-1}(y),$$

auf sein Bild in $F^{-1}(y)$ induziert. Wir müssen dafür nur zeigen, dass ϑ_0 injektiv ist, vorausgesetzt y ist klein genug.

Wir nehmen an ϑ_0 wäre nicht injektiv ist, egal wie klein y wird. Demnach gibt es Folgen (x_j, y_j) und (x'_j, y_j) mit

$$\begin{aligned}\vartheta(x_j, y_j) &= \vartheta(x'_j, y_j) \quad y_j \rightarrow 0 \\ \text{und } x_j - x'_j &\notin \Gamma(y_j).\end{aligned}$$

Nach der Wahl einer konvergierenden Teilfolge, können wir annehmen, dass $x_j \rightarrow x_0$ und $x'_j \rightarrow x'_0$. Somit $\vartheta(x_0, 0) = \vartheta(x'_0, 0)$ und $x_0 - x'_0 \in \Gamma(0)$. Folglich ist $x_j - x'_j$ nah an einem Punkt in $\Gamma(y_j)$. Die Menge $\Gamma(y_j)$ ist jedoch diskret und die Punkte haben uniformen Abstand voneinander. Da ϑ außerdem lokal ein Diffeomorphismus ist folgt, dass $x_j - x'_j \in \Gamma(y_j)$ was einen Widerspruch ergibt. Zusammenfassend haben wir jetzt einen Symplektomorphismus auf ganz $\mathbb{R}^n \times D_2$ gefunden, der $\mathbb{R}^n / \Gamma(y) \times \{y\}$ diffeomorph abbildet. $\square_{\text{Schritt 3}}$

2.1.5 Schritt 4 - Normierung der Gitter $\Gamma(y)$

Um jetzt auf $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \times D_2$ einen symplektischen Diffeomorphismus zu erhalten müssen wir die Gitter $\Gamma(y)$ mittels eines Symplektomorphismus normieren. Diesen Symplektomorphismus definieren wir implizit mithilfe einer geeigneten erzeugenden Funktion. Wir suchen also einen Symplektomorphismus

$$\begin{aligned}\sigma : \mathbb{R}^n \times D_1 &\rightarrow \mathbb{R}^n \times D_2 \\ (\xi, \eta) &\mapsto (x, y)\end{aligned}$$

der jeweils $\mathbb{Z}^n \times \{\eta\}$ auf $\Gamma(y) \times \{y\}$ sendet, damit wir dahinter unseren Symplektomorphismus ϑ , aus Schritt 3, schalten können.

Wir können \mathbb{Z}^n auf $\Gamma(y)$ abbilden, indem wir uns an die Definition von $\Gamma(y)$ erinnern wonach

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}^n &\rightarrow \Gamma(y) \\ \xi &\mapsto \sum_k \gamma_k(y) \xi_k = x.\end{aligned}$$

Da für eine erzeugende Funktion $V(\xi, y)$ gelten muss, dass $\frac{\partial}{\partial y} V = x$ und wir aus der Definition der Basisvektoren der Gitter wissen, dass $\gamma_k(y) = \gamma_k + \frac{\partial}{\partial y} Q_k = \frac{\partial}{\partial y} W_k$ für eine glatte Funktion W_k , setzen wir

$$V(\xi, y) := \sum_k W_k(y) \xi_k$$

und haben somit $\eta = \frac{\partial}{\partial \xi} V(\xi, y) = W(y)$. Damit haben wir implizit den Symplektomorphismus σ definiert. Da $\frac{\partial}{\partial y} W(y) = (\gamma_1(y), \dots, \gamma_n(y))$ und die $\gamma_j(y)$ linear unabhängig sind, hat $\frac{\partial}{\partial y} W(y)$ vollen Rank und W ist somit lokal um den Fixpunkt $0 \in \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus.

Nach eventueller Einschränkung der Gebiete D_1 und D_2 , definiert W den Diffeomorphismus $\mu : D_2 \times D_1$ aus der Formulierung des Arnold-Jost-Lioville Theorems. Die Komposition

$$\psi := \vartheta \circ \sigma : (\mathbb{R}^n \times D_1, \omega_{std}) \rightarrow (M, \omega)$$

ist dann eine symplektische Abbildung die den gesuchten Symplektomorphismus

$$\psi : (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \times D_1, \omega_{std}) \rightarrow (U, \omega)$$

induziert. Wir rechnen noch unter Beachtung von (iii) aus Lemma 1

$$\mu \circ F \circ \psi(\xi, \eta) = \mu \circ F \circ \vartheta(x, y) = \mu(y).$$

Wodurch die letzte Behauptung des Theorems bewiesen ist. $\square_{\text{Schritt 4}}$

3 Literatur

- [1] Hofer and Zehnder, Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics, 2010
- [2] V.I Arnold. Mathematical methods of classical mechanics. W.A. Benjamin, Inc., 1968