PROPÄDEUTIKUM 2016

GABRIELE BENEDETTI

Quellen:
Holger Wuschke, *Skript Propädeutikum*, 2015
Gerald Hofmann, *Ingenieurmathematik für Studienanfänger*, Springer, 2013
Wikipedia

1. Mengenlehre

Was ist eine Menge?

Definition. *Eine Menge ist eine Zusammenfassung gewissener Objekte zu einem Ganzen. Die hierbei zusammengefasstenen Objekte heißen Elemente der Menge.*

Beispiel. Die Menge der Farben oder der Tiere. Die Königin der Mengen: die leere Menge $\varnothing$. Sie enthält kein Element.

Was versteht man unter Objekt?

Definition. *Ein Objekt ist etwas, das von unserer Anschauung oder Denken betrachtet werden kann.*

Beispiel. Die Farbe Rot. Die Elefantin Tuffi. Die Zahl 5. Ein Dreieck.

Wenn ein Objekt x ein Element der Menge A ist, schreiben wir $x \in A$. Andernfalls $x \notin A$. Eine Menge M_1 ist Teilmenge von einer Menge M_2, wenn alle Elemente von M_1 auch Elemente von M_2 sind. Schreibweise: $M_1 \subset M_2$.

Beispiel. Es sei M eine Menge, dann $\varnothing \subset M$, $M \subset M$. Es sei $a \in M$, dann $\{a\} \subset M$, wobei $\{a\}$ ist die Menge, die nur a enthält. Eine Menge, die nur ein Element enthält heißt Einermenge.

Mengen werden durch zwei Arten angegeben:

- Durch explizite Angabe (Aufzählung) der Elemente.

  Beispiel. $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$, $\quad B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

- Durch eine charakterisierende Eigenschaft ihrer Elemente.

  Beispiel. $C = \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl, die 28 teilt}\}$.

Man kann von einer der zwei Arten zu der anderen wechseln.

Aufgabe. Man durchführe diesen Wechsel für die zwei obenstehenden Beispiel.

Definition. *Zwei Mengen M_1 und M_2 sind gleich, wenn sie dieselbe Elemente enthalten, nämlich wenn $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_1$. Folgerung: $\{2, 3, 3\} = \{2, 2, 3\}$.*

Die Potenzmenge von M ist die Menge $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subset M\}$.

Aufgabe. Man gebe die Menge $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ durch Aufzählung an.

Definition. *Die Kardinalität einer Menge M ist die Anzahl ihrer Elemente. Schreibweise $\#M$. Beispiel: $\#\{a, b, c\} = 3$, $\#\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = 8$. Allgemein: $\#\mathcal{P}(M) = 2^{\#M}$.*

Wir erklären jetzt verschiedene Verfahren, um von zwei Mengen A und B eine dritte Menge zu bilden.

- Der Durchschnitt von A und B (Conjunktion). Schreibweise: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$. Zwei Mengen heißen disjunkt, wenn $A \cap B = \varnothing$.
- Die Vereinigung von A und B (nicht-ausschließende Disjunktion). Schreibweise: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$.
- Die Differenz von A und B. Schreibweise: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$.

  Aufgabe. Wann ist $A \setminus B = \varnothing$? Wann ist $A \setminus B = A$?

- Das kartesische Produkt von A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. Schreibweise: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$.

  Aufgabe. Welche ist die Kardinalität von $A \times B$? Man gebe durch Aufzählung $A \times B$ an, wenn $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b\}$. Man zeichne das kartesisches Produkt zwei Teilmengen A und B einer Gerade als Teilmenge der Ebene.

Beispiel. Man zeichne drei allgemeine Teilmengen der Ebene und man beschreibe die ergebenden Region mit der Hilfe der obengenannten Begriffe.

2. Zahlbereiche

Zahlen sind wichtige Objekte des mathematischen Denkens. Sie bilden verschiedene Mengen, sogenannte Zahlbereiche, in einem Erweiterungsverfahren:

- $\boxed{\mathbb{N}}$ Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Sie enthält ein einziges erstes Element 1 und jedes Element n hat einen Nachfolger $n + 1$.
- $\boxed{\mathbb{N}_0}$ Wenn man 0 als erstes Element nimmt, schreibt man $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
- $\boxed{\mathbb{Z}}$ Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$. Jedes Element hat einen Nachfolger und einen Vorgänger.
- $\boxed{\mathbb{Q}}$ Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Jedes Intervall zwischen n und $n + 1$ wird in $2, 3, 4, 5, ...$ gleich großen Subintervallen zerlegt.
- $\boxed{\mathbb{R}}$ Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind alle Punkte auf der Gerade. Nicht alle Punkte sind rationale, z.B. $\sqrt{2}$, die mit Lineal und Zirkel konstruiert werden kann. Die Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen irrationale.

Jede reele Zahl kann durch einen Dezimalbruch (oder gemeinen Bruch) dargestellt werden. Die rationale Zahlen sind genau diejenige reellen Zahlen, deren Dezimalbruch endlich oder periodisch ist. Beispiel: $0,125$ und $3,123\bar{4}$. Die Darstellung ist nicht eindeutig.

Aufgabe. Man zeige, dass $1 = 0,\bar{9}$. Witz: Wie viele Mathematiker braucht man, um eine Glühbirne zu wechseln? Antwort: $0,\bar{9}$.

Wir haben eine Ordnungrelation $<$ (oder $\leq$) zwischen reellen Zahlen. Wir schreiben $a < b$ (oder $a \leq b$), wenn a vor b auf der reellen Gerade kommt (oder $a = b$). Zwei Eigenschaften:

- Es gelten $a \leq b$ oder $b \leq a$ (Totalität). Wenn beide gelten, $a = b$ (Antisymmetrie).
- Wenn $a \leq b$ und $b \leq c$, dann $a \leq c$ (Transitivität).

Definition. *Die Zahlen größer Null heißen „positiv", die kleiner als Null „negativ".*

Schreibweise für Intervalle reeller Zahlen. Seien $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, & (a,b) &=]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},\\
(a,b] &=]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, & [a,b) &= [a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},\\
(a,+\infty) &=]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, & [a,+\infty) &= [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\},\\
(-\infty,b] &=]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, & (-\infty,b) &=]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe. Es seien die Intervalle $I_1 = [1,3)$, $I_2 = [3,7]$, $I_3 = (-2,10)$ gegeben. Man gebe als Vereinigung disjunkter Intervalle die folgenden Mengen an:

$$a)\ I_1 \cap I_2, \quad b)\ I_1 \cap I_3, \quad c)\ I_1 \cup I_2,$$
$$d)\ I_1 \setminus I_2, \quad e)\ I_3 \setminus I_2, \quad f)\ (I_1 \cup I_2) \cap I_3.$$

3. Grundrechenarten

Die Addition, deren Zeichen „+" erstmal in (Johannes Wiedmann, Leipzig, 1489) erscheint, und die Multiplikation, deren Zeichen „ · " erstmal in (Leibniz, 1698) erscheint, sind auf allen Zahlenbereiche definiert. Man kann eine geometrische Definition der beiden Operationen geben: $a + b$ ist die Länge der Verkettung zwei Strecken mit Länge a und b; $a \cdot b$ ist das Flächenmaß eines Rechtecks mit Seiten a und b.

- Die Addition und die Multiplikation sind assoziativ
$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \qquad \forall a,b,c$$
- Die Null ist das neutrales Element der Addition und die Eins der Multiplikation:
$$a + 0 = 0 + a = a, \qquad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$
- Die Null ist das absorbierende Element der Multiplikation:
$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$
Man schreibt $-a$ für die Gegenzahl (das additive Inverse), und $\frac{1}{a}$ für den Kehrwert (das multiplikative Inverse), wenn sie existieren. Sie erfüllen
$$a + (-a) = 0 = (-a) + a, \qquad a \cdot \tfrac{1}{a} = 1 = \tfrac{1}{a} \cdot a.$$
- Die Addition und die Multiplikation sind kommutativ
$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a, \qquad \forall a, b.$$
- Die Multiplikation ist distributiv über die Addition
$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad \forall a,b,c.$$

Aufgabe. Man gebe eine geometrische Übersetzung der vorherigen Eigenschaften.

Aufgabe. Man zeige, dass die Null keinen Kehrwert besitzt. Innerhalb welcher Zahlenbereichen besitzen die Zahlen eine Gegenzahl? Innerhalb welcher Zahlenbereichen besitzen die Zahlen (ungleich Null) einen Kehrwert? Man zeige, dass

$$-(-a) = a, \qquad \frac{1}{\frac{1}{a}} = a, \qquad -(a+b) = (-a)+(-b), \qquad \frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}.$$

Aufgabe. Für alle a, b gilt $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Insbesondere, $(-1) \cdot a = -a$.

Definition. *Die Differenz zwischen a und b ist die einzige Zahl $a-b$, für die $(a-b)+b=a$ gilt. Falls $-b$ existiert, dann $a-b=a+(-b)$. Das Zeichen $-$ erscheint erstmal in (Johannes Wiedmann, Leipzig, 1489).*

Aufgabe. Man multipliziere aus
$$3x\big[5y-(7x-4y)\big]-8y\big[3x-(7y-5x)+(6x-11y)(2x+y)\big].$$
Man klammere aus
$$2ax-ay-6bx+3by.$$

Aufgabe. Die drei binomischen Formeln für $a,b\in\mathbb{R}$:
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2,\quad a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$
Man gebe eine geometrische Übersetzung dieser Formeln.

Definition. *Der Quotient zwischen a und $b\neq 0$ ist die Zahl $\frac{a}{b}$, die $\frac{a}{b}\cdot b=a$ erfüllt. Falls $\frac{1}{b}$ existiert, dann $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$. Das Zeichen $\frac{a}{b}$ wird Bruch genannt und es erscheint erstmal in (Al–Hassar, Fez, fl. 1200).*

Aufgabe. Man leite die folgenden Gesetze für die Bruchenrechnung her.

- Das addieren von Brüchen mit selbem Nenner. Seien a,b,c reelle Zahlen, $b\neq 0$:
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}.$$
- Die Kürzung und Erweiterung von Brüchen. Seien a,b,c reelle Zahlen, $b,c\neq 0$:
$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}.$$
- Das Multiplizieren von Brüchen: für alle a,b,c,d reellen Zahlen, $b,d\neq 0$, gilt es
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$
- Der Kehrwert von Brüchen. Seien $a,b\neq 0$ reelle Zahlen:
$$\frac{1}{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}.$$

Aufgabe. Man zeige, dass für alle reellen Zahlen a,b,c,d, wobei $b,d\neq 0$, gilt es
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$
Bemerkung: Diese Formel ist manchmal nicht so günstig für das Rechnen, wie das folgende Beispiel zeigt. Man vereinfache
$$\frac{2x}{x+2}-\frac{2x-4}{(x+2)^2}+\frac{2-x}{x-2},\qquad \frac{2b-a}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a}{b^2-a^2},$$
$$\frac{-b}{9a^2-b^2}+\frac{7a+2b}{6ab-2b^2}-\frac{6a^2-4b^2}{27a^3-3ab^2}-\frac{8b^2}{54a^3-6ab^2}.$$

Der Definition zufolge ist das Summieren kompatibel mit der Anordnung
$$(i)\;\; a<b \iff b-a>0,\qquad (ii)\;\; a>0,\ b>0 \implies a+b>0.$$

Aufgabe. Aus (i) und (ii) folgt
$$a<c,\ b<d \implies a+b<c+d.$$

Aufgabe. Man zeige, dass $a \leq b$ genau dann gilt, wenn $-a \geq -b$. Man leite davon das Vorzeichen von $-a$ her.

Es gelten die folgenden Vorzeichenregeln für die Multiplication. Sie sind am wichtigsten um (Un)Gleichungen zu lösen. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$:

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ oder } b = 0;$$

Aufgabe. Es sei $a \neq 0$. Was ist das Vorzeichen von $\frac{1}{a}$? Es seien $a, b \neq 0$. Man zeige, dass

$$a < b \implies \begin{cases} \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} & \text{wenn } ab < 0, \\ \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} & \text{wenn } ab > 0. \end{cases}$$

Aufgabe. Das Multiplizieren ist kompatibel mit der Anordnung. Das heißt:

$$\begin{cases} a \leq b \iff a \cdot c \leq b \cdot c & \text{für alle } c > 0, \\ a \leq b \iff a \cdot c \geq b \cdot c & \text{für alle } c < 0. \end{cases}$$

Der Betrag einer reellen Zahl a ist so definiert

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn } a \geq 0 \\ 0, & \text{wenn } a = 0 \\ -a, & \text{wenn } a \leq 0. \end{cases}$$

Aufgabe. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass $|a|$ nich negativ ist und ist gleich null genau dann, wenn a Null ist. Schließlich zeige man, dass $|-a| = |a|$.

Aufgabe. Man leite die Dreiecksungleichung

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

her und zeige, dass die Gleichung gilt genau dann, wenn a und b dasselbe Vorzeichen haben.

Aufgabe. In Abhängigkeit von der reellen Zahl a, gib bitte als Vereinigung disjunkter Intervalle die folgenden Mengen an:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > a\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\}.$$

Aufgabe. Für welche reellen Zahlen x sind die folgenden Gleichungen und Ungleichungen erfüllt?

$$|x^2 + 3\sqrt{2}x - 41| \underset{>}{=} -2, \qquad |2x + 7| \underset{<}{=} 2;$$

$$(x-1)(x^2+42) \underset{\geq}{=} 0, \quad \big(|x+3| - 1\big)(3 - x) \underset{<}{=} 0.$$

4. Potenzen mit natürlichem Exponent

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, sei es definiert

$$a^n := \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n-\text{mal}}, \quad \text{und} \quad \text{falls } a \neq 0, \quad a^0 = 1.$$

Aufgabe. Es gelten die Potenzgesetze

$$(a^n)^m = a^{nm}, \qquad a^n a^m = a^{n+m}, \qquad a^n b^n = (ab)^n.$$

Man zeige, dass $a^0 = 1$ von den Potenzgesetzen hergeleitet werden kann.

Aufgabe. Welche ist das Vorzeichen von a^n?

Definition. *Ein Polynom n-ten Grades, wobei $n \in \mathbb{N}_0$, ist ein Ausdruck der Form*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

wobei x eine reelle Variable ist und die Zahlen $a_n, \ldots, a_0$ reelle Zahlen sind mit $a_n \neq 0$ (falls $V(x)$ nicht das Nullpolynom ist). Die Zahlen a_k heißen Koeffizienten und a_n heißt der Leitkoeffizient. Wir sagen, dass das Polynom normiert ist, falls $a_n = 1$. Die Schreibweise $\mathrm{Grad}(P(x))$ *kennzeichnet den Grad von $P(x)$.*

Die Addition und Multiplikation von Polynomen folgen den gleichen Rechengesetzen der reellen Zahlen. Ein Polynom ergibt eine Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch Substitution der Variablen mit reellen Zahlen (z.B. $P(2) = \sum_{k=0}^{n} a_k 2^k$), die wir ganzrationale Funktion nennen.

Aufgabe. Es seien $P(x) = 2x^2 + 5x - 1$ und $Q(x) = x^3 - x - 3$. Man berechne $P(x) + Q(x)$ und $P(x) \cdot Q(x)$.

Aufgabe. Es seien $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome, wobei $\mathrm{Grad}(P(x)) > \mathrm{Grad}(Q(x))$ ist. Man zeige, dass

$$\mathrm{Grad}(P(x) + Q(x)) = \mathrm{Grad}(P(x)).$$

Aufgabe. Man zeige, dass der Grad eines Produktes von Polynomen die Summe der Grade der Faktoren beträgt. Nämlich, dass für alle Polynome $P(x)$ und $Q(x)$

$$\mathrm{Grad}(P(x) \cdot Q(x)) = \mathrm{Grad}(P(x)) + \mathrm{Grad}(Q(x)).$$

Definition. *Die Zahl $n!$, die Fakultät von $n \in \mathbb{N}_0$ genannt wird, die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist. Es gilt*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1, \qquad 0! = 1.$$

Die Zahl $\binom{n}{k}$, die Binomialkoeffizient genannt und als „n über k“ gelesen wird, ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$.

Theorem. *Es gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Das Pascal'sche Dreiecke wird durch den vorherigen Theorem konstruiert. Es gilt die folgende Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Aufgabe. Man beweise den Theorem mit der Hilfe der Formel.

Es sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Verallgemeinerung der ersten binomischen Formel lautet

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + ... + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Aufgabe. Man zeige

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n; \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{k} = 0.$$

Die Verallgemeinerung der dritten binomischen Formel lautet

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1)-k}b^k\right).$$

Wenn $a \neq b$, haben wir

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1)-k}b^k.$$

Im speziellen Fall $a = 1$, finden wir

$$\frac{1-b^n}{1-b} = \sum_{k=0}^{n-1} b^k.$$

Aufgabe. Es seien $a, b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Durch Anwendung der dritten binomischen Formel zeige man, dass

$$a^n < b^n \quad \Longleftrightarrow \quad a < b.$$

Definition. *Eine geometrische Folge*[1] *von Länge n, Startwert $a \neq 0$ und Quotient $q \in \mathbb{R}$ ist die Folge $a_0, ..., a_{n-1}$, wobei $a_0 := a$, $a_1 := aq$, $a_2 := aq^2$,... und $a_n := aq^{n-1}$. Die Summe der Elementen einer geometrische Folge beträgt*

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = na, \quad \textit{für } q = 1, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a\frac{q^n - 1}{q-1}, \quad \textit{für } q \neq 1.$$

Wir nehmen immer größere und größere Werte von n. Was passiert mit $\sum_{k=0}^{n-1} aq^k$? Wenn $|q| \geq 1$, ist die Summe divergent da $|aq^n|$ immer größer $|a|$ ist. Wenn $|q| < 1$, ist die Summe convergent da $|aq^n|$ gegen null geht als n gegen $+\infty$ geht. In diesem Fall haben wir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} aq^k = a\frac{1}{1-q}.$$

Beispiel. Intuitive Übersetzung der Folge für $q = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{4}$ durch die Zerlegung eines Quadrats und eines gleichseitigen Dreiecks.

Aufgabe. Es sei eine geometrische Folge von Länge n, Startwert a und Quotient q gegeben. Für alles $1 \leq k \leq n-1$ zeige man, dass die Folge $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}$ eine geometrische Folge von Länge $n-k$, Startwert aq^{k-1} und Quotient q ist.

Aufgabe. Die Summe s_3 der ersten drei Glieder einer unendlichen geometrischen Folge beträgt 6 und die Summe s aller Glieder dieser Folge beträgt $\frac{16}{3}$. Für welche natürlichen Zahlen gilt die Ungleichung

$$|s_n - s| < \frac{1}{96}?$$

Definition. *Es seien $b \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Es existiert eine einzige nicht negative reelle Zahl, die die folgende Gleichung in der Variablen a erfüllt:*

$$a^n = b.$$

Wir schreiben $\sqrt[n]{b}$[2] *für diese einzige Lösung und wir nennen sie die n-te Würzel von b.*

[1] Man sehe das YouTube video „Geometrische Reihe (Mathe-Song)“ von DorFuchs.

[2] Das Zeichen $\sqrt{\ }$ wurde 1525 vom deutschen Mathematiker Christoph Rudolff eingeführt. Es representiert das Buchstabe „r“, das für Radikal steht.

Aufgabe. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $a, b > 0$ zeige man, dass

$$a < b \iff \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

Aufgabe. Es sei jetzt b eine reelle Zahl (nicht unbedingt nicht negativ) und n eine natürliche Zahl. Man finde die reelle (nicht unbedingt nicht negativ) Lösungen der Gleichung

$$x^n = b.$$

Aufgabe. Man zeige, dass, für jedes Paar Zahlen $a, b > 0$, der arithmetische Durchschnitt größer als der geometrische Durchschnitt ist:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Wann gilt die Gleichung? Aus selber Art: $a/b + b/a \geq 2$. Wann gilt die Gleichung?

Aufgabe. Man mache die Nenner der folgenden Brüche rational:

$$\frac{1+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}, \qquad \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Aufgabe. Es sei $x > 0$ gegeben. Man zeige, dass

$$0 < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

gilt. Wenn x größer und größer wird, was passiert mit der Zahlen

$$(x+1)^2 - x^2, \qquad (x+1) - x, \qquad \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \ ?$$

Werden sie größer, kleiner, oder bleiben sie gleich? Wie kann man diese Zahlen auf den Graphen von $y = x^2, y = x, x = \sqrt{x}$ darstellen?

5. Abbildungen

Wir können ein Verhältnis zwischen die Menge der Studenten und die Menge der Tiere bilden. Jedem Studenten ordne ich eindeutig sein Lieblingstier zu.

Definition. *Eine Abbildung (oder Funktion) f ist eine bestimmte Vorschrift, die jedem Element einer Menge D genau ein Element einer Menge Z zuordnet. Schreibweise: $f : D \to Z$, oder $d \overset{f}{\mapsto} z$, oder $d \mapsto f(d)$.*

Beispiel. Wenn in unserer Gruppe eine Person es gibt, die zwei Lieblingstiere hat, dann ist das Verhältnis „Person $\mapsto$ Lieblingstier(Person)" nicht mehr eine Abbildung.

Beispiel. Wenn ich ein $z_* \in Z$ feststelle, kann ich die konstante Abbildung $f_z : D \mapsto Z$ betrachten, die jedem $d \in D$ das Element z_* zuordnet.

Beispiel. Für jede Menge M definiere ich die Identität $\mathrm{Id}_M : M \to M$ als $\mathrm{Id}_M(m) = m$.

Die Menge D heißt Definitionsmenge und die Menge Z Zielmenge. Oft versucht man am Anfang die Abbildung f auf einer größeren Quellmenge Q zu definieren, aber das gelingt nicht für jedes Element in Q, sondern nur für gewissene Elemente, die dann den maximalen Definitionsbereich $D \subset Q$ zusammenbilden.

Beispiel. Es gibt in unserer Gruppe jemanden, der kein Lieblingstier hat.

Definition. *Für uns sind die Funktionen, für die $Q = Z = \mathbb{R}$, von zentraler Bedeutung. Wir nennen sie reelle Funktionen. Man kann den Graph einer reellen Funktion zeichnen, durch den man viele Informationen gewinnen kann.*

Aufgabe. Man gebe den maximalen Definitionsbereich Bildmenge folgender reeller Funktionen.

- $f_1(x) = \sqrt{x}$,
- $f_2(x) = \frac{1}{x}$,
- $f_3(x) = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{42}}{2+\sqrt{2}}} + \frac{x+\sqrt{4-x^2}}{\frac{1}{1+x}-1}$.
- $f_4(x) = \frac{x}{x}$.

Definition. *Das Element $y = f(x) \in Z$ ist das Bild von x unter der Abbildung f. Die Teilmenge $B \subset Z$, die alle Bilder enthält, ist die Bildmenge von f. Für jede $C \subset D$ kann ich das Bild $f(C) \subset Z$ als*

$$f(C) := \{f(x) \mid x \in C\}$$

definiere. Für jede $W \subset Z$ kann ich das Urbild $f^{-1}(W) \subset D$ von W als

$$f^{-1}(W) := \{x \mid f(x) \in W\}$$

definiere. Wenn $W = \{y\}$ eine Einermenge ist, schreiben wir einfach $f^{-1}(y)$ statt $f^{-1}(\{y\})$.

Wichtige Hinweis. Um die Bildmenge von $f : D \to Z$ zu bestimmen, muss man alle $y \in Z$ finden, für die die Gleichung $y = f(x)$ lösbar in D ist (d.h. es gibt mindestens eine Lösung $x \in D$).

Definition. *Eine Abbildung heißt surjektiv, falls $B = Z$. Eine Funktion $f : D \to Z$ kann immer durch Einschränkung der Zielmenge surjektiv gemacht werden: $f : D \to B$.*

Beispiel. Was ist f(Nicole)? Was ist f^{-1}(Krokodil)? Was ist $f(\{\text{Bastian, Luise,Anton}\})$? Was ist $f^{-1}(\{\text{Hund,Meerschwein,Delfin}\})$.

Aufgabe. Man zeichne die Graphen der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$x \xmapsto{f} (x-1)^2 + 1, \quad x \xmapsto{g} |x+2| - 5.$$

Man bestimme ihre Bildmengen und die Urbilder

$$f^{-1}(-1), \quad f^{-1}(1), \quad f^{-1}(2), \qquad g^{-1}(-10), \quad g^{-1}(-5), \quad g^{-1}(0).$$

Definition. *Es seien $f : D \to Y$ und $g : E \to Z$ zwei Abbildungen mit $Y \subset E$. Wir definieren die Verkettung $g \circ f : D \to Z$ als $g \circ f(x) = g(f(x))$.*

Aufgabe. Es seien $f : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ durch $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$ und $g : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ durch $g(a) = b, f(b) = c, f(c) = c$ gegeben. Man berechne

$$f \circ f, \quad f \circ f \circ f, \quad g \circ g.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $f^n := \overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{n-\text{mal}}$ (und ähnlich g^n). Man berechne f^n und g^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe. Es seien $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = (x + y, x)$ und $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ durch $g(w, z) = (w + 2z, z)$ definiert. Man berechne $f \circ g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $g \circ f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe. Es seien f und g reelle Funktionen, die durch $f(x) = \frac{2}{x-1}$ und $g(x) = \frac{x+2}{1+x}$. Man berechne die reellen Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$ und bestimme ihren Definitionsbereich.

Definition. *Eine Abbildung heißt injektiv, falls für jede zwei Elemente $x_1, x_2 \in D$, die $f(x_1) = f(x_2)$ erfüllen, folgt $x_1 = x_2$. Nämlich, für alle $y \in Z$ ist das Urbild $f^{-1}(y)$ die Leermenge (falls $y \notin B$) oder eine Einermenge (falls $y \in B$).*

Wichtige Hinweis. Um festzustellen, ob eine Funktion $f : D \to Z$ injektiv ist, muss man zeigen, dass, für alle $y \in Z$, die Gleichung $y = f(x)$ höchstens eine Lösung $x \in D$ besitzt.

Definition. *Eine Abbildung $f : D \to Z$ heißt bijektiv, wenn sie surjektiv und injektiv ist. Das passiert genau dann, wenn es eine Abbildung $g : Z \to D$ gibt für die*

$$g \circ f = \mathrm{Id}_D, \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_Z.$$

Die Funktion g heißt die Umkehrfunktion und es wird $g := f^{-1}$ geschrieben. Man merkt an, dass $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Wichtige Hinweis. Es sei $f : D \to Z$ eine injektive Funktion. Dann wissen wir, dass die entsprechende Einschränkung $f : D \to B$ bijektiv ist. Anders gesagt: *„Eine injektive Funktion ist umkehrbar auf ihrem Bild“*.

Manchmal wird es uns gefragt, die Umkehrbarkeit von $f : D \to Z$ (auf dem Bild) zu beweisen und die Umkehrfunktion explizit zu finden. Wir verfahren folgendermaßen.

Wir betrachten für jedes $y \in Z$ die Gleichung

$$y = f(x)$$

in der Variablen $x \in D$. Die Gleichung nach der Variablen $x \in D$ auflösen, indem

- man die Teilmenge $B \subset Z$ aller y bestimmt, für die die Gleichung lösbar ist;
- man für solche y die Lösung x eindeutig und explizit als $x = g(y)$ schreibt, für eine gewissene Funktion $g : B \to D$, die dann die Umkehrfunktion ist.

Aufgabe. Man berechne die Umkehrfunktion der folgenden reellen Funktionen

$$f(x) = \frac{x-2}{x+4}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}, \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+4}}, \quad D_g = [2, +\infty)$$

$$h(x) = (x-1)^2 + 1, \quad D_h = [1, +\infty), \qquad j(x) = x^2 + 2x - 1, \quad D_j = [0, +\infty).$$

Definition. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend) falls*

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y) \quad \big(\ \text{bzw. } f(x) > f(y)\ \big).$$

Aufgabe. Man zeige, dass eine monotone Funktion injektiv ist.

Aufgabe. Man betrachte die Abschnittweise definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3 & \text{falls } x \leq -2 \\ x - 3 & \text{falls } -2 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{falls } x \geq 3. \end{cases}$$

Man zeige, dass f wohl definiert ist (was passiert für $x = -2$ und $x = 3$?) und man zeichne ihren Graph. Man zeige, dass f monoton wachsend ist (man kann die drei Abschnitte einzeln betrachten).

6. Potenzen mit reellem Exponent und Logarithmen

Es sei $a > 0$. Wenn $p \in \mathbb{Z}$, setzen wir

$$a^p := \begin{cases} \text{schon definiert}, & \text{falls } p \geq 0 \\ \dfrac{1}{a^{-p}}, & \text{falls } p < 0. \end{cases}$$

Für $p \in Z$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[n]{a^p}.$$

Aufgabe. Man zeige, dass $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$.

Schließlich wird die Potenz a^r mit Exponent $r \in \mathbb{R}$ durch Approximation von r mit rationalen Zahlen definiert. Die Potenzgesetze gelten auch in diesem generelleren Fall.

Aufgabe. Man leite aus der Potenzgesetze, dass

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

Man berechne für jedes $n \in \mathbb{N}$ aus der Potenzgesetze

$$\sqrt[n]{a^{n+3}}\sqrt[3]{a^{3n+1}}\sqrt[3]{a^{-1}},$$

Wir bilden jetzt zwei Funktionen. Wir stellen $r \in \mathbb{R}$ fest und betrachten $P_r : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ durch $P_r(a) = a^r$ gegeben. Wir haben $P_r(1) = 1$ und

$$\text{die Funktion } P_r \text{ ist } \begin{cases} \text{streng monoton fallend} & \text{falls } r < 0, \\ \text{konstant} & \text{falls } r = 0, \\ \text{streng monoton wachsend} & \text{falls } r > 0. \end{cases}$$

Aufgabe. Man zeichne den Graph von P_r und berechne ihre Umkehrfunktion, wenn $r \neq 0$.

Wir stellen jetzt $a \in \mathbb{R}$ fest und betrachten $E_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ durch $E_a(r) = a^r$ gegeben. Wir haben $E_a(0) = 1$, $E_a(1) = a$ und

$$\text{die Funktion } E_a \text{ ist } \begin{cases} \text{streng monoton fallend} & \text{falls } 0 < a < 1, \\ \text{konstant} & \text{falls } a = 1, \\ \text{streng monoton wachsend} & \text{falls } a > 1. \end{cases}$$

Aufgabe. Man zeichne den Graph von E_a.

Falls $a \neq 1$ ist die Funktion E_a umkehrbar und wir schreiben $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ für ihre Umkehrfunktion, die „der Logarithmus zu Basis a" heißt. Das heißt, dass für jedes $b > 0$ gibt es eine einzige positive Zahl $\log_a b$, die die folgende Gleichung in der Variablen r erfüllt:

$$a^r = b.$$

Bei der Definition von Umkehrfunktion gilt es

$$a^{\log_a b} = b, \quad \text{für alles } b > 0 \qquad \log_a(a^r) = r, \quad \text{für alles } r \in \mathbb{R}.$$

Wenn wir $r = 0$ und $r = 1$ in der Zweiten einsetzen, erhalten wir $\log_a(1) = 0$ und $\log_a a = 1$. Außerdem gilt es

$$\text{die Funktion } \log_a \text{ ist } \begin{cases} \text{streng monoton fallend} & \text{falls } 0 < a < 1, \\ \text{streng monoton wachsend} & \text{falls } a > 1. \end{cases}$$

Aufgabe. Man schreibe die folgenden Gleichungen in exponentieller Form um.

$$\log_3 x = 9, \qquad \log_3 27 = x, \qquad \log_x 5 = 1.$$

Man schreibe die folgenden Gleichungen in logarithmischer Form um.

$$7 = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \qquad x = 2^5, \qquad x^3 = 16.$$

Aufgabe. Man leite aus den Potenzgesetzen die Logarithmusgesetze her:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c, \qquad \log_a b^r = r \log_a b, \qquad \log_a b = \frac{\log_{a_0} b}{\log_{a_0} a},$$

wobei $a > 0, a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $r \in \mathbb{R}$ und $a_0 > 0, a_0 \neq 1$.

Aufgabe. Man zeige, dass wenn $a > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gerade ist, dann

$$\log_a b^n = n \log_a |b|.$$

Aufgabe. Man leite

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \qquad \text{wobei} \;\; a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0,$$

aus den Logarithmusgesetze her.

Aufgabe. Es seien $a > 0, a \neq 1$ und $u > v > 0$ gegeben. Man finde $b > 0$, für das

$$\frac{1}{3}\log_a(u^2 - v^2) - \frac{1}{2}\log_a(u - v) - \log_{a^2}(u + v) + \frac{1}{4}\log_{a^3}(u^2 - 2uv + v^2) = \log_{\frac{1}{a^6}} b.$$

Hinweis: Man benutze das dritte Logarithmusgesetz um eine einzige Basis zu haben und die Binomische Formel in den Logarithmusargumenten.

Aufgabe. Man schreibe $\log_{12} 27$ mittels $a = \log_4 9$.

Aufgabe. Es seien $a > 0, a \neq 1$ und $b \in \mathbb{R}$ gegeben. In Abhängigkeit der Parameter a und b finde man die Lösungen von

$$x^{\log_a x} = b.$$

7. Teilbarkeit

Der Quotient zwei Zahlen v und t in $\mathbb{Z}$ (bzw. zwei Polynomen $V(x)$ und $T(x)$) ist nicht immer eine ganze Zahl (bzw. ein Polynom). Das heißt, dass wir nicht immer eine ganze Zahl q (bzw. ein Polynom $Q(x)$) finden können, so dass

$$v = q \cdot t, \qquad (\text{ bzw. } V(x) = Q(x) \cdot T(x) \text{ }).$$

Wenn das passiert, sagen wir, dass t (bzw. $T(x)$) ein Teiler von v (bzw. $V(x)$) ist, oder dass v (bzw. $V(x)$) ein Vielfaches von t (bzw. $T(x)$) ist. Wir schreiben dann $t \mid v$ (bzw. $T(x) \mid V(x)$) und wir lesen „t teilt v“ (bzw. „$T(x)$ teilt $V(x)$“).

Aufgabe. Man zähle die Elemente der Mengen $\text{Teiler}(42) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 42\}$ und Teiler(41) auf. Ist $x - 1$ ein Teiler von $x^3 - 1$?

Wir konzentrieren jetzt auf die ganze Zahlen. Eine Zahl $v > 1$ ist immer von 1 und v geteilt. Wenn diese die einzige Teiler sind, heißt v eine Primzahl.

Aufgabe. Man gebe die Menge $\{p \mid p \text{ ist ein Primzahl kleiner als } 50\}$ durch Aufzählung an.

Jede ganze Zahl $v \neq 0$ kann in eindeutiger Art als Produkt (mit Vorzeichen) von Primzahlen dargestellt werden.

Bemerkung. Die in der Zerlegung erscheinenden Primzahlen sind genau die Primzahlen, die auch Teiler von v sind.

Beispiel. Wir haben $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5$ und $-180 = -2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Aufgabe. Es seien eine Primzahl p und zwei ganze Zahlen v_1 und v_2 gegeben. Man zeige, dass

$$p \,|\, (v_1 \cdot v_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p \,|\, v_1 \quad \text{oder} \quad p \,|\, v_2.$$

Eine Zahle t ist ein gemeinsamer Teiler von zwei Zahlen v_1 und v_2, wenn t die beide teilt. Wenn 1 der einzige positive gemeinsame Teiler von v_1 und v_2 ist, heißen v_1 und v_2 teilerfremde Zahlen.

Aufgabe. Sind die Paare

$$(6, -51), \quad (14, 72), \quad (-21, 10)$$

jeweils teilerfremd?

Der großte gemeinsame (positive) Teiler von v_1 und v_2 wird mittels der Schreibweise $\operatorname{ggT}(v_1, v_2)$ gekennzeichnet.

Eine Zahle v ist ein gemeinsames Vielfache von zwei Zahlen t_1 und t_2, wenn v von den beiden geteilt ist. Die Zahl $t_1 \cdot t_2$ ist immer in gemeinsames Vielfache von t_1 und t_2. Das kleinste gemeinsame (positive) Vielfache von t_1 und t_2 wird mittels der Schreibweise $\operatorname{kgV}(t_1, t_2)$ gekennzeichnet.

Aufgabe. Man berechne ggT und kgV von

$$(45, 105, 180) \qquad (100, 126, 147).$$

Hinweis: In der Primzahlzerlegung muss man nur gemeinsame Faktoren mit niedrigstem Exponent (bzw. alle Faktoren mit höchstem Exponent) um den kgV (bzw. den ggV) zu bestimmen.

Aufgabe. Man berechne

$$\frac{161}{150} - \frac{16}{15}; \qquad \frac{73}{20} - \left(\frac{19}{30} - \frac{5}{6}\right); \qquad \frac{\frac{34}{3} - \frac{91}{12}}{\left(\frac{7}{16} - \frac{17}{48}\right) \cdot 15}.$$

Allgemein kann man die Division mit Rest ausführen. Es seien $t, v \in \mathbb{Z}$ gegeben (bzw. $T(x), V(x)$ Polynomen), wobei $t \neq 0$ (bzw. $T(x) \neq 0$). Es gibt dann genau ein $q \in \mathbb{Z}$ und ein $r \in \mathbb{N}_0, r < t$ (bzw. ein Polynom $Q(x)$ und ein Polynom $R(x)$ mit $\operatorname{Grad}\big(R(x)\big) < \operatorname{Grad}\big(T(x)\big)$), für die

$$v = q \cdot t + r \qquad (\text{ bzw. } V(x) = Q(x) \cdot T(x) + R(x) \text{ })$$

gilt. Es folgt, dass $t \,|\, (v - r)$ (bzw. $T(x) \,|\, \big(V(x) - R(x)\big)$) und

$$\frac{v - r}{t} = q \qquad \Big(\text{ bzw. } \frac{V(x) - R(x)}{T(x)} = Q(x) \text{ }\Big).$$

Die Division mit Rest lässt sich durch den euklidischen Algorithmus (schriftliche Division) berechnen. Allerdings, für die Division eines Polynom $V(x)$ durch ein Polynom $T(x) = x - s$ ersten Grades, wobei s eine reelle Zahle ist, können wir eine schnellere Methode anwenden: das Ruffini-Horner Schema. Wir haben

$$V(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k\right) \cdot (x - s) + r,$$

wobei

- $b_{n-1} = a_n$, • $b_k = a_{k+1} + b_{k+1} \cdot s$, für $0 \le k < n-1$, • $r = a_0 + b_0 \cdot s$.

Wenn wir $x = s$ in der obenstehenden Gleichung einsetzen, finden wir $V(s) = r$. Deshalb das Ruffini-Horner Schema berechnet auch den Wert von der ganzrationale Funktion $V(x)$ beim Punkt s. Außerdem, folgt es, dass $(x-s)$ teilt $V(x)$ genau dann, wenn $V(s) = 0$ ist, nämlich wenn s eine Nullstelle von V ist.

Aufgabe. Man berechne mit der Hilfe des Ruffini-Horner Schema:

- Die Quotienten und die Resten der folgenden Divisionen
$$\big(6x^4 - 2x^2 + 7x - 5\big) : (x+3); \quad \big(x^3 + 3\sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}\big) : (x - \sqrt{2}).$$
- die Werte $P(17)$ und $P(\sqrt{2})$, wobei $P(x) = x^3 - 7x^2 + 30x - 40$;
- den Wert $P(3)$ und die Zerlegung von $P(x)$ in Faktoren ersten Grades, wobei $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$. Man berechne anschließlich $P(1+\sqrt{2})$ mit der Hilfe der Zerlegung.

Wir konzentrieren uns jetzt wieder auf die ganze Zahlen. Es sei $t \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir schreiben $\mathrm{Rest}_t(v)$ für den Rest von $v \in \mathbb{Z}$ bei der Division durch t. Es seien nun m ganze Zahlen $v_1, v_2, ..., v_m \in \mathbb{N}$ und m ganze Zahlen $u_1, \dots, u_m$ gegeben, für die $t \,|\, (v_i - u_i)$, für alle $i = 1, \dots m$. Zum Beispiel kann man $u_i = \mathrm{Rest}_t(v_i)$ nehmen. Dann haben wir
$$\mathrm{Rest}_t\big(v_1 + v_2 + ... + v_m\big) = \mathrm{Rest}_t\big(u_1 + u_2 + ... + u_m\big),$$
das heißt: die Summe der v_i und der u_i denselben Rest bei der Division durch t haben. In ähnlicher Weise haben wir
$$\mathrm{Rest}_t\big(v_1 \cdot v_2 \cdot ... \cdot v_m\big) = \mathrm{Rest}_t\big(u_1 \cdot u_2 \cdot ... \cdot u_m\big).$$

Beispiel. Wir berechnen $\mathrm{Rest}_7(50 + 7 \cdot 2^{10!} + 76)$. Wir haben $\mathrm{Rest}_7(50) = 1$ (da $50 = 7 \cdot 7 + 1$), $\mathrm{Rest}_7(7 \cdot 2^{10!}) = 0$, $\mathrm{Rest}_7(76) = 6$ (da $76 = 10 \cdot 7 + 6$). Es folgt, dass
$$\mathrm{Rest}_7(50 + 7 \cdot 2^{10!} + 76) = \mathrm{Rest}_7(1 + 0 + 6) = \mathrm{Rest}_7(7) = 0.$$
Anders gesagt, 7 teilt $50 + 7 \cdot 2^{10!} + 76$.

Beispiel. Wir berechnen $\mathrm{Rest}_3(2^n)$. Wir haben $\mathrm{Rest}_3(2) = \mathrm{Rest}_3(-1)$. Deshalb,
$$\mathrm{Rest}_3(2^n) = \mathrm{Rest}_3((-1)^n) = \begin{cases} \mathrm{Rest}_3(-1) = 2, & \text{falls } n \text{ ungerade ist;} \\ \mathrm{Rest}_3(1) = 1, & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}.$$

Aufgabe. Man zeige, dass um den Rest einer Zahl bei der Division durch $2, 5, 10$ zu bestimmen, braucht man nur die Einerstelle zu betrachten. Was passiert mit 4 und 8? Man zeige, dass um den Rest einer Zahl bei der Division durch 3 oder 9 zu bestimmen, braucht man nur die Quersumme der Zahl zu betrachten.

Aufgabe. Man zeige, dass die Summe der dritten Potenzen von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch 9 teilbar ist.

Es sei $t > 1$ eine natürliche Zahl. Jede Zahl $v \in \mathbb{N}_0$ kann eindeutig in dem t-Zahlsystem geschrieben werden. Das heißt, dass ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt und $m+1$ Zahlen $r_0, ..., r_m$, wobei jedes r_k in $\{0, \dots, t-1\}$ liegt und $r_m \neq 0$ (wenn $v \neq 0$ ist), für die
$$v = r_m t^m + r_{m-1} t^{m-1} + \ldots + r_1 t + r_0.$$
Die Zahlen r_k können in folgender Weise bestimmt werden:

- Wenn $v < t$, setzen wir $r_0 := v$ und wir sind fertig. Ansonsten führen wir die Division $v : t$ mit Rest aus und wir erhalten $v = v_1 \cdot t + r_0$.
- Wenn $v_1 < t$ ist, setzen wir $r_1 := v_1$ und wir sind fertig. Ansonsten führen wir die Division $v_1 : t$ mit Rest aus und wir erhalten $v_1 = v_2 \cdot t + r_1$.
- Wenn $v_2 < t$ ist, setzen wir... und so weiter.

Aufgabe. asdasd

8. Polynomen des zweiten Grades

Wir betrachten jetzt ein allgemeines Polynom des zweiten Grades

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

mit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$, wobei $a \neq 0$. Wenn wir a ausklammern, können wir schreiben

$$P(x) = a \cdot Q(x),$$

wobei $Q(x)$ ist das normierte Polynom

$$Q(x) = x^2 + px + q, \qquad q := \frac{b}{a}, \quad p = \frac{c}{a}.$$

Wir wenden die zweite binomische Formel an und schreiben

$$Q(x) = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \Delta, \qquad \text{wobei} \quad \Delta := \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

die Diskriminante von $Q(x)$ heißt. Wir betrachten drei Fälle.

$\boxed{\Delta < 0}$ Dann $Q(x) > 0$ für alle reellen Zahlen und es gibt keine reelle Lösung von $Q(x) = 0$.

$\boxed{\Delta = 0}$ Dann $Q(x) \geq 0$ für alle reellen Zahlen und $Q(x) = 0$ genau dann, wenn $x = x_1 = x_2 := -\frac{p}{2}$.

$\boxed{\Delta > 0}$ Dann $Q(x) = 0$ genau dann, wenn $x = x_1 := -\frac{p}{2} - \sqrt{\Delta}$ oder $x = x_2 := -\frac{p}{2} + \sqrt{\Delta}$. Es gilt
  - $Q(x) > 0$ genau dann, wenn $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$;
  - $Q(x) < 0$ genau dann, wenn $x \in (x_1, x_2)$.

Das Vorzeichen von $P(x)$ wird vom Vorzeichen a und $Q(x)$ mittels des Vorzeichengesetzes der Multiplikation bestimmt.

Es sei nun $\Delta \geq 0$. Bei der Division mit Rest wissen wir, dass

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2).$$

Wenn wir die rechte Seite ausmultiplizieren, finden wir die Vieta Formeln:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Die Vieta Formeln funktionieren wie ein Wörterbuch:

$$\Big\{\text{Funktionen von } p \text{ und } q\Big\} \quad \xleftrightarrow{\text{Vieta}} \quad \Big\{\text{Symmetrische Funktionen}^3 \text{ von } x_1 \text{ und } x_2\Big\}.$$

Wir erklären diesen Begriff in zwei Beispielen.

Beispiel. Durch Anwendung der Vieta Formeln schreiben wir Δ als eine symmetrische Funktion von x_1 und x_2. Wir rechnen

$$\Delta = \frac{p^2}{4} - q = \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} - x_1 x_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_2}{4} = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2.$$

[3] Eine Funktion $F(x_1, x_2)$ ist symmetrisch, wenn $F(x_1, x_2) = F(x_2, x_1)$.

Beispiel. Durch Anwendung der Vieta Formeln schreiben wir $x_1^2 + x_2^2$ als eine Funktion von p und q. Wir rechnen

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q.$$

Aufgabe. Man gebe ein Polynom zweiten Grades mit Nullstellen $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$ und Leitkoeffizient $a = 2$.

Aufgabe. Es seien x_1 und x_2 die Nullstellen des Polynoms

$$x^2 + px + q,$$

wobei $p, q \in \mathbb{R}$. Man schreibe die Nullstellen des Polynoms

$$x^2 - px + q$$

als Funktion von x_1 und x_2.

Aufgabe. Durch Anwendung der Vieta Formeln wähle man die Koeffizienten des Polynoms

$$x^2 + px + q$$

so, dass es die Nullstellen $x_1 = p^2$ und $x_2 = \frac{q}{4}$ hat.

Aufgabe. Bei welchen Werten von p hat die Gleichung $x^2 - px - 28 = 0$ reelle Lösungen, welche die Bedingung $x_1^2 + x_2^2 = 65$ erfüllen?

Bei welchen Werten von r hat die Gleichung $x^2 - rx + 36 = 0$ reelle Lösungen, welche die Bedingung $x_1^2 + x_2^2 = 49$ erfüllen? Hinweis: Man prüfe, dass die Lösungen tatsächlich reell sind.

9. Lösungsmethoden für (Un)Gleichungen

Es sei

$$L(x) = R(x) \quad \text{oder} \quad L(x) < R(x) \quad \text{oder} \quad L(x) \leq R(x)$$

eine (Un)Gleichung in der reellen Unbekannte x, wobei $L(x)$ und $R(x)$ Ausdrücke in der Variablen x sind (z.B. $L(x) = x^2 - 5\sqrt{x} + 6$ und $R(x) = \log_x 7 + \frac{1}{x} + 1$). Wir bezeichnen die (Un)Gleichung mit dem Buchstabe G und wir möchten gerne ihre Lösungsmenge $M_G \subset \mathbb{R}$ bestimmen, wobei

$$M_G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ erfüllt } G\}.$$

Als erster Schritt müssen wir die Menge $D_G \subset \mathbb{R}$ aller x, für die die (Un)Gleichung gut definiert ist (für die obenstehenden konkreten $L(x)$ und $R(x)$ müssen wir z.B. $x > 0$, sonst können wir die Wurzel von x nicht Ziehen, $x > 0, x \neq 1$, da x auch Basis eines Logarithmus ist, und $x \neq 0$, sonst den Kehrwert von x nicht existiert, verlangen).

Dann wir können damit anfangen, die (Un)Gleichung G zu lösen. Es gibt verschiedene einfache (Un)Gleichungen G, die wir schon behandeln können wie, zum Beispiel,

- lineare (Un)Gleichungen, wobei $L(x) = ax + b$ und $R(x) = 0$;
- quadratische (Un)Gleichungen, wobei $L(x) = ax^2 + bx + c$ und $R(x) = 0$;
- (Un)Gleichungen mit Betrag, wobei $L(x) = |x|$ und $R(x) = a$.

Wenn wir eine neue (Un)Gleichung treffen und wir können sie gleich nicht lösen, versuchen wir eine der folgenden Strategien auszuführen, um zu einem einfacheren Fall, den wir behandeln können, zu gelangen.

- **Faktorisierung**. Diese Strategie besteht aus drei Schritte:
  (1) Alle Termen auf eine Seite bringen;
  (2) Der so entstehende Ausdruck als Produkt faktorizieren;

(3) Das Vorzeichen der Faktoren bestimmen und die Vorzeichenregel für ein Produkt anwenden.

Hinweis: Wenn ein Polynom $P(x)$ zu faktorizieren ist, dessen Grad höher als 2 ist, versuche man einfache Zahlen x_0 (z.B. $x_0 = 1, -1, 2, -2, ...$) zu finden für die $P(x_0) = 0$ ist und dann wende man das Ruffini-Schema an, um lineare Faktoren herauszukriegen.

- **Substitution** Wenn die Unbekannte x in der (Un)Gleichung immer in einem gewissenen Ausdruck $S(x)$ auftretet, machen wir die Substitution $y = S(x)$ und wir lösen die resultierende (Un)Gleichung H nach y. Wenn hoffentlich wir die Lösungsmenge von H finden können, dann die Lösungsmenge von G ist durch
$$M_G = \{x \mid S(x) \in M_H\}$$
gegeben. Das heißt, dass wir danach die x bestimmen müssen, für die $S(x) \in M_H$.
- **Monotonie** Man findet eine monotone Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ aus einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ so, dass $L(x)$ und $R(x)$ sich schreiben lassen als
$$L(x) = f\big(\mathfrak{L}(x)\big), \quad R(x) = f\big(\mathfrak{R}(x)\big).$$
Man muss hier prüfen, dass tatsächlich $\mathfrak{L}(x) \in I$ und $\mathfrak{R}(x) \in I$.
Wenn G eine Gleichung ist, gilt es der Definition der Monotonie zufolge
$$L(x) = R(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f\big(\mathfrak{L}(x)\big) = f\big(\mathfrak{R}(x)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{L}(x) = \mathfrak{R}(x).$$
Das heißt, dass die Gleichung G äquivalent zur Gleichung $\mathfrak{G}$ ist, die von
$$\mathfrak{L}(x) = \mathfrak{R}(x)$$
gegeben ist. Wir versuchen dann $\mathfrak{G}$ zu lösen.
Ähnlicherweise, wenn G eine Unleichung ist, gilt es der Definition der Monotonie zufolge
$$L(x) < R(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f\big(\mathfrak{L}(x)\big) < f\big(\mathfrak{R}(x)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathfrak{L}(x) < \mathfrak{R}(x), & \text{für } f \text{ wachsend,} \\ \mathfrak{L}(x) > \mathfrak{R}(x), & \text{für } f \text{ fallend.} \end{cases}$$
Das heißt, dass die Ungleichung G äquivalent zur Ungleichung $\mathfrak{G}$ ist, die von
$$\mathfrak{L}(x) < \mathfrak{R}(x), \quad \text{für } f \text{ wachsend,} \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{L}(x) > \mathfrak{R}(x), \quad \text{für } f \text{ fallend}$$
gegeben ist. Wir versuchen dann $\mathfrak{G}$ zu lösen.
Hinweise: Dieselbe Strategie funktionert, wenn wir fangen mit $L(x)$ und $R(x)$ an, die in I liegen und dann wir die neue Un(Gleichung) $\mathfrak{G}$ betrachten, deren linke Seite $\mathfrak{L}(x) := f\big(L(x)\big)$ und deren rechte Seite $\mathfrak{R}(x) := f\big(R(x)\big)$ sind, und deren Vergleichszeichen bestimmt werden muss, je nachdem f wachsend oder fallend ist.

Aufgabe. Man finde die Lösungsmengen folgender (Un)Gleichungen durch Faktorisierung
$$\frac{5x-7}{4x+4} + \frac{x+3}{3x+3} = 1; \qquad \frac{(x-1)(x-2)}{x-3} \geq 2; \qquad \frac{x^3 - x + 3}{2x-1} \leq 3.$$

Aufgabe. Man finde die Lösungsmengen folgender Gleichungen durch Substitution
$$x^4 + x^2 - 2 = 0, \qquad x - \sqrt{x} - 6 = 0, \qquad \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 3,$$
$$x^{\log_a x} - 2x^{-\log_a x} = 1, \quad \text{wobei } a > 0, a \neq 1; \qquad a^{2x} + a^x - 12 = 0, \quad \text{wobei } a > 0;$$
$$(|2x+7| - 1)^2 + 5(|2x+7| - 1) - 6 = 0.$$

Aufgabe. Man finde die Lösungsmengen folgender Gleichungen durch Monotonie

$$(2x^2+1)^r \le (x^2+2)^r, \quad \text{wobei } r \in \mathbb{R}, \qquad \Big(\frac{11}{9}\Big)^{2x-5} - \Big(\frac{9}{11}\Big)^{5x-9} = 0,$$

$$\log_{x-1}(x^2-3x+4) \ge 2, \qquad \log_{x-1}(x^3+2x^2+3) \le 2$$

$$\log_3 x^2 \le 1, \qquad \log_{\frac{1}{2}} x^3 \le 9, \qquad \log_x \Big(\frac{1}{2}\Big) \le -2.$$

10. Summen und Produkten

Aufgabe. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass

$$\sum_{k=1}^{n} a = n \cdot a, \qquad \sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \prod_{k=1}^{n} a = a^n, \qquad \prod_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c^n \cdot \prod_{k=1}^{n} a_k,$$

wobei a, c und a_k beliebige reelle Zahlen sind.

Aufgabe. Man berechne

$$a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \ldots \cdot a^n, \qquad \Big(\big((a^2)^3\big)^{\cdots}\Big)^n, \qquad \sum_{k=1}^{n} \log_a k.$$

Aufgabe. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Man berechne die folgenden teleskopischen Summen

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1), \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \log_a \Big(1 + \frac{1}{k}\Big).$$

Hinweis: Man schreibe

$$2k+1 = (k+1)^2 - k^2, \qquad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \qquad 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}.$$

Aufgabe. Man berechne

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

mit der Hilfe der vorherigen Aufgaben und der Identität

$$k = \frac{(2k+1)-1}{2}.$$

Aufgabe. Man berechne mit der Hilfe der vorherigen Aufgaben

$$\sum_{k=1}^{n}(7k+3), \qquad \sum_{k=2}^{n} \Big(\frac{1}{k(k-1)} + \frac{2}{k(k+1)}\Big).$$

11. Lineare Systeme

Es seien h und k natürliche Zahlen. Es seien $x_1, \ldots, x_k$ reelle Variablen und für jede natürliche Zahl $i \in \{1, \ldots, h\}$ reelle Koeffizienten $a_{i,0}, a_{i,1}, \ldots, a_{i,k}$ gegeben. Wir betrachten das folgende System S von h linearen Gleichungen in k Variablen:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,k}x_k = a_{1,0}; \\ a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,k}x_k = a_{2,0}; \\ \qquad\qquad\qquad\quad \ldots = \ldots; \\ a_{h,1}x_1 + \ldots + a_{h,k}x_k = a_{h,0}. \end{cases}$$

Wir finden iterativ die Lösungsmenge M_S dieses Systems mittels der Substitutionsmethode.

Anfang der Methode

Wir schauen die Koeffizienten aud der linken Seiten. Es ergeben sich zwei Möglichkeiten:

A Alle Koeffizienten $a_{i,j}$ auf der linken Seite sind null. In diesem Fall lässt sich das System als

$$\begin{cases} 0 = a_{1,0}; \\ 0 = a_{2,0}; \\ \ldots = \ldots; \\ 0 = a_{h,0}. \end{cases}$$

schreiben.

1. Fall Eines von $a_{1,0}, \ldots, a_{h_0}$ ist Null. Dann besitzt das System keine Lösung. Nämlich, $M_S = \varnothing$.

2. Fall Alle die Koeffizienten $a_{1,0}, \ldots, a_{h,0}$ sind Null. Dann ist jedes k-Tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ reeller Zahlen eine Lösung von S. Nämlich, $M_S = \mathbb{R}^k$, wobei

$$\mathbb{R}^k = \{(y_1, \ldots, y_k) \mid y_k \in \mathbb{R}\}.$$

B Es gibt einen Koeffizienten auf der linken Seite, der nicht Null ist. Dieser Koeffizient taucht in einer der h Gleichung auf. Wir ordnen die Gleichung und die Variablen neu so, dass der von Null verschiedene Koeffizient $a_{1,1}$ ist. Wir schreiben die erste Gleichung um, indem wir die Variable x_1 isolieren:

$$x_1 = \frac{a_{1,0}}{a_{1,1}} - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} x_2 - \ldots - \frac{a_{k,0}}{a_{1,1}} x_k \qquad (\star).$$

1. Fall Wenn keine andere Gleichung übrig ist, sind wir fertig, die Variablen $x_2, \ldots, x_k$ sind frei und die Lösungsmenge ist

$$M_S = \left\{ (x_1, y_2, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k \;\middle|\; x_1 = \frac{a_{1,0}}{a_{1,1}} - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} y_2 - \ldots - \frac{a_{k,0}}{a_{1,1}} y_k \right\}.$$

2. Fall Wenn es noch Gleichungen gibt, setzen wir x_1 in diesen anderen Gleichung mittel der Gleichung $(\star)$ ein. Damit erhalten wir ein anderees lineares System

$$\begin{cases} b_{1,2}x_2 + \ldots + b_{1,k}x_k = b_{1,0}; \\ b_{2,2}x_2 + \ldots + b_{2,k}x_k = b_{2,0}; \\ \qquad\qquad\qquad \ldots = \ldots; \\ b_{h,2}x_2 + \ldots + b_{h,k}x_k = b_{h,0}. \end{cases}$$

mit $h-1$ Gleichungen und $k-1$ Variablen, wobei die Koeffizienten $b_{i,j}$ durch die Substitution bestimmt werden. Wir können jetzt zum Anfang der Methode zurück gehen und den verschiedenen Schritten nochmal folgen.

Aufgabe. Man löse die folgenden Systeme

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2; \\ x_1 - \frac{3}{2}x_2 = 5. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 7x_2 = 1; \\ 2x_1 + 14x_2 = 2. \end{cases}$$

Aufgabe. Man löse die folgenden Systeme

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -7; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Aufgabe. Man löse das folgende System in Abhängigkeit vom Parameter a:

$$\begin{cases} ax_1 + 4x_2 = 2; \\ 9x_1 + ax_2 = 3. \end{cases}$$

E-mail address: gabriele.benedetti@math.uni-leipzig.de