Grundlagen der Mathematik (WS 17/18)

Zusatzaufgaben über Äquivalenzrelationen

1. Es sei $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Menge der von Null verschiedenen reellen Zahlen. Wir definieren die Relation

$$R = \big\{(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \;\big|\; a/b \in \mathbb{Q}^*\big\},$$

wobei $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ die Menge der von Null verschiedenen rationalen Zahlen darstellt. Zeigen Sie, dass

(a) $(\sqrt{6}, \sqrt{2}) \notin R$;

(b) R eine Äquivalenzrelation ist;

(c) die Aquivalenzklassen $[\sqrt{12}]_R$ und $[\sqrt{27}]_R$ übereinstimmen ;

(d) die Aquivalenzklassen $[\sqrt{8}]_R$ und $[\sqrt{12}]_R$ nicht übereinstimmen.

2. Es sei M eine nicht leere Menge und A die Menge der Abbildungen $\varphi : M \to M$, d.h. A ist die Menge aller Abbildungen, die M sowohl als Definitionsbereich als auch als Wertebereich haben. Wir schreiben als $\circ : A \times A \to A$ die innere Verknüpfung, die durch die Hintereinanderausführung von Abbildungen gegeben wird. Nämlich, für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in A$ ist $\varphi_2 \circ \varphi_1 \in A$ durch die Eigenschaft

$$\forall\, x \in M, \qquad \varphi_2 \circ \varphi_1(x) = \varphi_2\big(\varphi_1(x)\big)$$

definiert.

Wir nehmen nun als konkretes Beispiel die fünfelementige Menge

$$M = \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Es sei $e : M \to M$ die Identitätsabbildung, d.h. $e(x) = x$, für alle $x \in M$. Weiter sei $a : M \to M$ die Abbildung, die durch die folgenden Gleichungen definiert ist:

$$a(1) = 4, \quad a(2) = 2, \quad a(3) = 1, \quad a(4) = 3, \quad a(5) = 5.$$

(a) Zeigen Sie, dass $a : M \to M$ eine bijektive Abbildung ist. Weiter sei $b : M \to M$ die inverse Abbildung von a, d.h. $a \circ b = e = b \circ a$. Bestimmen Sie die Werte

$$b(1) = ? \qquad b(2) = ? \qquad b(3) = ? \qquad b(4) = ? \qquad b(5) = ?$$

(b) Es sei G die dreielementige Menge $G = \{e; a; b\}$. Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist und schreiben Sie ihre Verknüpfungstafel hin.

(c) Wir definieren eine Relation R auf M wie folgt:

$$R = \big\{(m,n) \in M \times M \;\big|\; \exists\, \varphi \in G,\ \varphi(m) = n\big\}.$$

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

(d) Zeigen Sie, dass $(1, 2) \notin R$. Bestimmen Sie alle die Äquivalenzklassen

$$[1]_R = ? \qquad [2]_R = ? \qquad [3]_R = ? \qquad [4]_R = ? \qquad [5]_R = ?$$

Wie viele verschiedene Äquivalenzklassen gibt es?

3. Es sei $\mathbb{Q}$ die Menge aller rationalen Zahlen. Wir definieren eine Relation R auf $\mathbb{Q}$ wie folgt

$$R = \big\{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q} \;\big|\; \exists\, n \in \mathbb{Z},\ q_2 = 3^n \cdot q_1\big\}^{\S}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

   (b) Bestimmen Sie $[0]_R$ und $[\frac{18}{49}]_R \cap [\frac{35}{3}]_R$.

   (c) Sind die Klassen $[\frac{119}{42}]_R$ und $[\frac{51}{2}]_R$ verschieden oder stimmen sie überein?

4. Wir betrachten die folgende Relation R auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

$$R = \big\{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\big|\; 4 \,|\, (m+n) \text{ oder } 4 \,|\, (m-n)\big\},$$

   d.h. $(m, n) \in R$ genau dann wenn 4 teilt $m+n$ oder $m-n$.

   (a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

   (b) Beweisen Sie, dass

$$\forall\, m \in \mathbb{Z}, \qquad [m]_R \in \Big\{[0]_R; [1]_R; [2]_R; [3]_R\Big\}.$$

   (Hinweis: Führen Sie die Division mit Rest von m durch 4 durch.).

   (c) Zeigen Sie, dass es genau drei Äquivalenzklassen von R gibt.

5. Auf $\mathbb{N}$ sei eine Relation R folgendermaßen definiert:

$$R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \;\big|\; \exists\, a, b \in \mathbb{N},\ m^a = n^b\}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

   (b) Welche sind die Äquivalenzklassen von R, die aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehen?

---

§ Erinnern Sie sich an die Definition von Potenzen mit ganzen Exponenten und an die Regel $3^{n_1} \cdot 3^{n_2} = 3^{n_1+n_2}$, für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.