Geometrie der Himmelsmechanik

Gabriele Benedetti
gbenedetti@mathi.uni-heidelberg.de
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~gbenedetti`
Raum 3/402, Telefon: 062215414228
Sprechstunde: Montags 15 - 17 Uhr und nach Vereinbarung

23. Juli 2018

Organisatorisches

- Montags Vorlesung und donnerstags Übungen (11-13 Uhr SRB).
- Alles ist inhaltlich relevant für die Prüfung. Die Übungsstunde wird interaktiv sein.
- Mündliche Prüfung von 30 Minuten bei weniger als 20 Teilnehmer. Ansonsten Klausur. Termine: Juli 27. 30. 31. Ich bin nicht in Heidelberg von 12.8. bis zum 15.12.
- Vorlesung am 30.4. fällt aus.

Plan des Kurses

1. Motive und historischer Abriss
2. Kurze Wiederholung der erwünschten Vorkenntnisse (GDG und Linearalgebra)
3. Das keplersche Problem
   (a) Klassische Lösung
   (b) Differentialgeometrie im Spiel
4. Das n-Körperproblem
   (a) Zweikörperproblem
   (b) Grundlagen des n-Körperproblems: Homographische Lösungen, Sundmanssatz
   (c) Das eingeschränkte Dreikörperproblem*

1 Motive und historischer Abriss 16.4.

Die Himmelsmechanik beschäftigt sich mit der Bahnbestimmung der Gestirne. Man versucht also zu verstehen

- die Geometrie der Bahnen (die Bahnform);
- die Zeitparametrisierung der Bahnen (die Dynamik).

Anfang des siebzehnten Jahrhunderts formuliert Johannes Kepler drei planetarsche Gesetze, die die empirischen Beobachtungen von Tycho Brahe begründeten:

1. *Die Bahnen der Planeten um die Sonne sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht (1609).*
2. *Die Verbindungslinie zwischen der Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Fläche (1609).*
3. *Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der mittleren Entfernungen (großen Halbachsen der Ellipsen) (1619).*

Newton leitet 1687 in seinem Buch *Principia Mathematica* die keplerschen Gesetze aus zwei umfassenden Gesetzen her: das Bewegungsgesetz ($\mathcal{D}$) und das Gravitationsgesetz ($\mathcal{G}$).

Das Bewegungsgesetz ($\mathcal{D}$)

Die Beschleunigung eines Körpers (oder Punktmasse) Q ist proportional zur der gesamten Kraft, die auf den Körper Q wirkt. Die Proportionalitätskonstante m_Q ist positiv und unabhängig von der Kraft. Wir nennen m_Q die Masse von Q. Wir übersetzen das Gesetz in die moderne Sprache des Vektoranalysis. Wenn die Bewegung des Körpers und die Kraft durch Vektorfunktionen $t \mapsto \mathbf{r}_Q(t) \in \mathbb{R}^3$ und $t \mapsto \mathbf{F}_Q(t) \in \mathbb{R}^3$ der Zeit $t \in \mathbb{R}$ gegeben sind, gilt

$$\mathbf{F}_Q(t) = m_Q \ddot{\mathbf{r}}_Q(t). \tag{$\mathcal{D}$}$$

Das Gravitationsgesetz ($\mathcal{G}$)

Ein Körper Q_2 wirkt auf einen Körper Q_1 mit einer Gravitationskraft $\mathbf{F}_{Q_1Q_2}$ ein, die entlang der Verbindungslinie von Q_1 nach Q_2 gerichtet und deren Stärke proportional zum Produkt der beiden Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstandes ist. Die Proportionalitätskonstante ist positiv, unabhängig von Q_1 und Q_2 und heißt die universelle Gravitationskonstant G. Die entsprechende Vektorgleichung lautet (Zeit t weggelassen von der Notation)

$$\mathbf{F}_{Q_1Q_2} = \frac{G m_{Q_1} m_{Q_2}}{|\mathbf{r}_{Q_2} - \mathbf{r}_{Q_1}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{Q_2} - \mathbf{r}_{Q_1}}{|\mathbf{r}_{Q_2} - \mathbf{r}_{Q_1}|}. \tag{$\mathcal{G}$}$$

Das keplersche Problem

Es seien P_1 und P_2 zwei Körper und es sei weiter angenommen, dass P_2 fest im Nullpunkt ist und dass $\mathbf{F}_{P_1} = \mathbf{F}_{P_1 P_2}$, d.h die einzige Kraft, die auf P_1 wirkt, ist die Gravitationskraft des Körpers P_2. Dann ergibt sich aus $(\mathcal{D})$ und $(\mathcal{G})$ die folgende Gleichung für $\mathbf{r} := \mathbf{r}_{P_1}$:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \tag{$\mathcal{K}$}$$

wobei $\mu := G m_{P_2} > 0$. Die Bestimmung einer Lösung der Gleichung $(\mathcal{K})$ heißt *keplersches Problem*. Newton zeigte, dass, wenn P_1 ein Planet des Sonnensystems und P_2 die Sonne ist, die (beschränkten) Lösungen $\mathbf{r}$ des keplerschen Problems, erfüllen die drei planetarschen Gesetze von Kepler.

Das Zweikörperproblem

Die Annahme, dass $\mathbf{r}_{P_2}$ fest ist, impliziert, dass $\mathbf{F}_{P_2} = \mathbf{F}_{P_2 P_1} = 0$. Also auf dieser Weise haben wir die Anziehungskraft von P_1 auf P_2 vernachlässigt (nicht so schlimm, wenn m_{P_2} viel größer als m_{P_1} ist). Die Bahnbestimmung von *beiden* Körpern P_1 und P_2 unter der *gegenseitigen* Anziehungskraft heißt Zweikörperproblem. Es handelt sich darum, die Funktionen $\mathbf{r}_{P_1}$ und $\mathbf{r}_{P_2}$ zu bestimmen, die dem Gleichungssystem

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_{P_1} = \dfrac{G m_{P_2}}{|\mathbf{r}_{P_2} - \mathbf{r}_{P_1}|^2} \cdot \dfrac{\mathbf{r}_{P_2} - \mathbf{r}_{P_1}}{|\mathbf{r}_{P_2} - \mathbf{r}_{P_1}|} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{P_2} = \dfrac{G m_{P_1}}{|\mathbf{r}_{P_1} - \mathbf{r}_{P_2}|^2} \cdot \dfrac{\mathbf{r}_{P_1} - \mathbf{r}_{P_2}}{|\mathbf{r}_{P_1} - \mathbf{r}_{P_2}|}. \end{cases} \tag{$\mathcal{ZKP}$}$$

genügen. Das Zweikörperproblem ist nicht schwer zu lösen. Die Bahnen der zwei Körper gehörchen jeweils einer Gleichung derart $(\mathcal{K})$ (mit zwei verschiedenen Konstanten μ), wenn man den Nullpunkt in dem Schwerpunkt $\frac{1}{m_{P_1}+m_{P_2}}(m_{P_1}\mathbf{r}_{P_1} + m_{P_2}\mathbf{r}_{P_2})$ hinstellt. Insbesondere gelten die keplerschen Gesetze immer noch, wenn man den Schwerpunkt zwischen dem Planeten und der Sonne statt der Lage der Sonne benutzt.

Das n-Körperproblem

Nun gibt es in unserem Sonnensystem mehrere Planeten, so dass die Bahnen der Sonne und eines bestimmten Planeten die Gleichungen $(\mathcal{ZKP})$ nicht mehr lösen. Daher betrachten wir allgemein eine Anzahl n von Körpern $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Die Bahnbestimmung dieser Körper unter der gegenseitigen Anziehungskraft heißt n-Körperproblem, wobei die Massen der Körper beliebig sein dürfen. Man erhält ein System von n Gleichungen

$$\begin{cases} m_{P_1}\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} = \mathbf{F}_{P_1P_2} + \mathbf{F}_{P_1P_3} + \ldots + \mathbf{F}_{P_1P_n}, \\ \qquad \ldots \end{cases} \tag{$n\mathcal{KP}$}$$

Die allgemeine Lösung dieses Problem hat eine echte Herausforderung für viele Mathematiker dargestellt. Später in diesem Kurs werden wir einfache Lösungen dieses Problem betrachten. Die heißen homographische Lösungen und haben die Eigenschaft, dass das von den Körpern gebildete n-Ecke seine Lage im Verlauf der Zeit nur durch Ähnlichkeitsbewegungen ändert. Die Suche nach speziellen Lösungen des n-Körperproblem ist auch heute sehr aktiv. 2000 wurden von Chenciner und Montgomery choreographische Lösungen eingeführt, wobei alle die Körper auf eine feste geschlossene Kurve periodisch laufen. Man siehe die Webseite von James Montaldi `http://www.maths.manchester.ac.uk/~jm/Choreographies`.

Stabilität des Sonnensystems

Wie es auch von den choreographischen Lösungen zu sehen ist, gelten für allgemeine n-Körpersysteme die keplerschen Gesetze nicht. Wie ist es möglich dann, dass solche Gesetze in unserem Sonnensystem von empirischen Beobachtungen bestätigt sind? Newton war schon diese Schwierigkeit bekannt.

"Kepler's laws, although not rigidly true, are sufficiently near to the truth to have led to the discovery of the law of attraction of the bodies of the solar system. The deviation from complete accuracy is due to the facts, that the planets are not of inappreciable mass, that, in consequence, they disturb each other's orbits about the Sun".

Anders gesagt: die Gesamtkraft der anderen Planeten $\mathbf{F}_{P_1P_3} + \ldots \mathbf{F}_{P_1P_n}$ auf P_1 ist klein im Vergleich mit der Anziehungskraft $\mathbf{F}_{P_1P_2}$ der Sonne und sie schadet die keplerschen Gesetze in unserer Zeit mehr oder weniger nicht. Allerdings ist es möglich, dass die Bahnen der Planeten in der fernen Zukunft eine starke Veränderung erleben werden (Zusammenstöße oder Fluchten von Planeten). Newton bat dazu eine transzendentale Ausweg an:

"Blind fate could never make all the planets move one and the same way in orbs concentric, some inconsiderable irregularities excepted which may have arisen from the mutual actions of comets and planets on one another, and which will be apt to increase, till this system wants a reformation".

Seit Newton haben sich viele Wissenschftaler mit der Stabilität des Sonnensystems beschäftigt. Die Stabilitätsfrage spielt auch heute eine entscheidende Rolle in der modernen Theorie der dynamischen Systeme nach den Pionierarbeiten von Poincaré und Liapunov am Ende des neunzehnten Jahrhunderts:

Man hat ein ideelles System, das sehr gut beschreibbar ist. Was passiert, wenn man dieses System leicht stört? Bleibt das neue System nah an dem ideellen? Für wie lange?

Um die Stabilität des Sonnensystems zu beweisen, versuchten die Wissenschaftler eine explizite Lösung des abstrakten n-Körperproblems zu finden. In diesem Versuch enwickelte Laplace (1814) seinen mechanischen Determinismus, der betrachtet werden kann, als die Vorgänger der Theorie der Gewöhnlichen Differentialgleichungen:

„Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Universums als Folge eines früheren Zustandes ansehen und als Ursache des Zustandes, der danach kommt. Eine Intelligenz, die in einem gegebenen Augenblick alle Kräfte kennt, mit denen die Welt begabt ist, und

die gegenwärtige Lage der Gebilde, die sie zusammensetzen, und die überdies umfassend genug wäre, diese Kenntnisse der Analyse zu unterwerfen, würde in der gleichen Formel die Bewegungen der größten Himmelskörper und die des leichtesten Atoms einbegreifen. Nichts wäre für sie ungewiss, Zukunft und Vergangenheit lägen klar vor ihren Augen."

Leider ist unsere Intelligenz nicht so umfassend wie Laplace möchte und eine solche Formel zu finden ist uns bis heute nicht gelungen. Trotzdem sagte Dirichlet 1858 zu seinem jungen Freund Kronecker, er habe eine stufenweise Annährung an die Lösung des n-Körperproblem gefunden. Dirichlet starb nach einem Jahr und keine Spur von einer solchen Lösung wurde in seinen Werken gefunden. Weierstraß dachte, dass Dirichlet eine Reihenentwicklung gefunden hätte und machte sich an die Arbeit die verlorene Lösung nachzuvollziehen:

„*Du erinnerst Dich, liebes Herz, daß wir zu der Zeit, als unsere Freundschaft eine innige geworden war, sodaß ich zuweilen das Bedürfnis empfand, auch über Arbeiten, die ich gern machen möchte, mit Dir zu reden und wir uns auch wohl in wissenschaftliche Träume und Phantasie verloren, oftmals von den Bedingungen der Stabilität des Weltsystems gesprochen haben.*"

Als Mittag-Leffler 1884 ein Preisausschreiben für seine mathematischen Zeitschrift *Acta Mathematica* mit der Förderung von Leopold II König von Schweden und Norwegen organisiert, schlug Weierstraß als Problem für die Kandidaten vor, eine Reihenentwicklung für die n-Körperproblem zu finden. Der Preis wurde 1889 Poincaré zuerkannt auch wenn er die Lösung nicht finden konnte, denn seine ursprüngliche Lösung enthielt ein Fehler. Trotzdem, hat er mit seiner Preisschrift zum Geburt einer neuen Branche der Mathematik beigetragen: die qualitative Theorie eines dynamischen Systems, die das Verhalten der Lösungen von einer Differentialgleichung im großen untersucht.

1912 starb Poincaré und erschien das Werk von Sundman *Mémoirs sur les problèm des trois corps*, wo schließlich eine Reihenentwicklung für das Dreikörperproblem angegeben wurde. Auch wenn die Konvergenzrate der Sundmans Reihe sehr langsam und von keiner praktischen Anwendung ist, gibt seine Arbeit wichtige Informationen um die Zusammenstößen von Körpern, die wir auch später betrachten werden. Eine Reihenentwicklung für das n-Körperproblem ohne Kollisionen wurde schließlich 1991 von Qiu-Dong Wang gegeben.

2 Wiederholung der gewünschten Vorkenntnisse 19.4.

Wir schreiben $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ für die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ für die Menge der positiven reellen Zahlen.

2.1 Linearalgebra

Wenn $d \in \mathbb{N}$, schreiben wir die Elementen

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

mit Fettschrift. Eine Basis $(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)$ des $\mathbb{R}^n$ heißt positiv, wenn die $d \times d$-Matrix, deren Spalten $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_d$ sind, positive Determinante besitzt. Wir schreiben $\mathbf{0}$ für den Nullvektor und benutzen die Abkürzung

$$\mathbb{R}^d_\times := \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Die spitzen Klammern bezeichnen das euklidische Skalarprodukt zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{w}$:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^{d} u_i w_i.$$

Die euklidische Norm von $\mathbf{u}$ schreiben wir als

$$u := |\mathbf{u}| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle},$$

die Einheitssphäre als

$$S^{d-1} := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; u = 1 \right\}.$$

und den offenen Ball um $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^d$ mit radius $a > 0$ als

$$B_a(\mathbf{u}_0) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; |\mathbf{u} - \mathbf{u}_0| < a \right\}.$$

Wenn $\mathbf{u}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^d_\times$ ist, schreiben wir

$$\hat{\mathbf{u}} := \frac{\mathbf{u}}{u} \in S^{d-1}$$

für seine Normierung.

Wir schreiben $\mathbf{I}_d$ für die Einheitsmatrix in $\mathbf{R}^{d^2}$, die Eins auf der Diagonale und Null umsonst besitzt. Wir kennzeichnen als $O(d)$ die Gruppe der orthogonalen Matrizen, nämlich der Matrizen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{d^2}$, die das Skalarprodukt erhalten:

$$\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d, \quad \langle \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle.$$

Die Untergruppe von $O(d)$, deren Elemente positive Determinante haben, schreiben wir als $SO(d)$. Wir kennzeichnen mit $A(d)$ den Vektorraum der antisymmetrischen Matrizen, nämlich der Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d^2}$, für die

$$\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d, \quad \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} \rangle.$$

Wir kennzeichnen mit $S(d)$ den Vektorraum der symmetrischen Matrizen, nämlich der Matrizen $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{d^2}$, für die

$$\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d, \quad \langle \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{M} \cdot \mathbf{w} \rangle.$$

Wir schreiben $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{M}} := \langle \mathbf{u}, \mathbf{M} \cdot \mathbf{w} \rangle$ für die von $\mathbf{M}$ gegebene symmetrische Bilinearform. Wir haben $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{I}_d} = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Wir kennzeichnen mit $S_+(d)$ die Untermenge der positiv definiten symmetrischen Matrizen. Wenn $\mathbf{M} \in S_+(d)$, dann ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{M}}$ ein Skalarprodukt und wir schreiben $|\mathbf{u}|_{\mathbf{M}} := \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{M}}}$. Wenn $\lambda_{\mathbf{M}} > 0$ der kleinste positive Eigenwerte ist, gilt

$$\lambda_{\mathbf{M}} |\mathbf{u}| \leq |\mathbf{u}|_{\mathbf{M}}, \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{M}. \tag{2.1}$$

Wenn $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, also $d = 3$, schreiben wir das Kreuzprodukt der beiden Vektoren als

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} u_2 w_3 - u_3 w_2 \\ u_3 w_1 - u_1 w_3 \\ u_1 w_2 - u_2 w_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Es gilt die Formel

$$\langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle, \qquad \forall\, \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^3.$$

Es sei $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ mit $c \neq 0$. Wir schreiben α für die orientierte Ebene orthogonale zu $\mathbf{c}$ durch $\mathbf{0}$, wobei eine Basis $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ von α positiv ist, genau dann, wenn $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{c})$ eine positive Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Auf dieser Ebene die Drehung um neunzig Graden $\mathbf{i} : \alpha \to \alpha$ ist definiert durch

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{u} = \hat{\mathbf{c}} \times \mathbf{u}, \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \alpha. \tag{2.2}$$

Für $d = 2k$ identifizieren wir $\mathbb{R}^{2k}$ mit dem Raum $\mathbb{C}^k$ der vektoren mit k complexen Koordinaten durch die Abbildung

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{2k-1} \\ u_{2k} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u_1 + u_2 i \\ \vdots \\ u_{2k-1} + u_{2k} i \end{pmatrix},$$

wobei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit darstellt. Besonders wichtig für uns werden die Fälle $k = 1$ und $k = 2$ sein.

Aufgabe 2.1. *Es sei $\mathbf{c} = (0, 0, c)$ mit $c > 0$. Wenn wir $\mathbb{C}$ als die orthogonale Ebene $\mathbb{R}^2 \times 0 \subset \mathbb{R}^3$ zu $\mathbf{c}$ betrachten, zeigen Sie, dass die Drehung $\mathbf{i}$ der komplexen Multiplikation durch die imaginäre Einheit i entspricht.*

2.2 Vektoranalysis

Alle die von uns betrachteten Abbildungen $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^{d_2}$, wobei Ω eine offene Teilmenge der $\mathbb{R}^{d_1}$ ist und $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, sind als glatt zu verstehen (d.h. unendlich differenzierbar). Insbesondere schreiben wir die erste Ableitung (das totale Differential) von $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{d_2})$ im Punkt $\mathbf{x}_0$ als $\mathrm{d}_{\mathbf{x}_0}\mathbf{f} : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$, wobei

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}_0}\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & & \dots & & \frac{\partial f_1}{\partial x_{d_1}}(\mathbf{x}_0) \\ & \ddots & & \iddots & \\ \vdots & & \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) & & \vdots \\ & \iddots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_{d_2}}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & & \dots & & \frac{\partial f_{d_2}}{\partial x_{d_1}}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \\ \vdots \\ \\ u_{d_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d_2}, \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{d_1}.$$

Wir sagen, dass $\mathbf{f}$ ein Diffeomorphismus ist, wenn ihre Bildmenge $\Omega' := \mathbf{f}(\Omega)$ offen ist und es eine glatte Umkehrabbildung $\mathbf{f}^{-1} : \Omega' \to \Omega$ gibt (in diesem Fall muss $d_1 = d_2$ sein).

Wenn $d_2 = 1$, also $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion ist, schreiben wir ihren Gradient in $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ als

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{d_1}}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d_1}.$$

sodass $\mathrm{d}_{\mathbf{x}_0} f \cdot \mathbf{u} = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0), \mathbf{u} \rangle$ für alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{d_1}$.

Aufgabe 2.2. *Es sei $f : \mathbb{R}^d_\times \to \mathbb{R}^+$ die Funktion $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$, die der Abstand zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{0}$ darstellt. Beweisen Sie, dass*

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d_\times$$

und skizzieren Sie dieses Vektorfeld.

Umgekehrt, wenn $d_1 = 1$ und $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, definiert die Vektorfunktion eine Kurve. Eine Kurve ist nähmlich eine Abbildung $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^d$, die von einem Zeitparameter $t \in I$ parametrisiert ist, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Wir kennzeichnen die Zeitableitungen von $\mathbf{x}$ mit Punkten über dem Buchstabe $\mathbf{x}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}, \quad \dots$$

Insbesondere heißt $\dot{\mathbf{x}}(t)$ der Tangentenvektor der Kurve $\mathbf{x}$ zur Zeit t (oder im Punkt $\mathbf{x}(t)$).

2.2.1 Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

Es sei $\mathbf{p} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2_\times$ die Abbildung

$$\mathbf{p}(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = re^{i\theta}.$$

Nach Identifizierung einer linearen Abbildung mit ihrer darstellenden Matrix haben wir

$$\mathrm{d}_{\mathbf{r}_0}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Also ist die Abbildung $\mathbf{p}$ ein lokaler Diffeomorphismus, der nicht global invertierbar ist, weil $\mathbf{p}(r,\theta) = \mathbf{p}(r',\theta')$ die Bedingungen $r = r'$ und $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$ impliziert. Etwa genauer ist $\mathbf{p}$ eine Überdeckung. Daraus folgt, dass für jede Kurve $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^2_\times$ eine Kurve $(r,\theta) : I \to \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}\big(r(t), \theta(t)\big), \qquad \forall\, t \in I.$$

Satz 2.3. *Es sei $(x,y) : I \to \mathbb{R}^2_\times$ eine beliebige Kurve mit $\dot\theta > 0$. Für jedes Zeitintervall $[t_1,t_2] \subset I$ mit $\theta(t_2) - \theta(t_1) < 2\pi$ definiere man*

$$\Omega_{t_1,t_2} := \Big\{ s\mathbf{r}(t) \;\Big|\; s \in [0,1],\ t \in [t_0,t_1] \Big\}.$$

Der Flächeinhalt von D ist durch die folgende Formel gegeben:

$$\mathrm{Area}(\Omega_{t_1,t_2}) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r^2(t)\dot\theta(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Da $t \mapsto \theta(t)$ monoton wachsend ist, gibt es ein Intervall $[\theta_1,\theta_2] \subset \mathbb{R}$, sodass $\theta : [t_1,t_2] \to [\theta_1,\theta_2]$ ein Diffeomorphismus mit $\theta(t_1) = \theta_1$ und $\theta(t_2) = \theta_2$ ist. Es sei $t : [\theta_1,\theta_2] \to [t_1,t_2]$ die Umkehrfunktion. Dann gilt

$$\Omega_{t_1,t_2} = \mathbf{p}(\Omega'_{t_1,t_2}), \qquad \Omega'_{t_1,t_2} = \Big\{ (r,\theta) \;\Big|\; \theta \in [\theta_1,\theta_2],\ r \in (0, r(t(\theta))] \Big\}$$

Durch zwei Anwendungen der Koordinatenwechselformel für Integrale bekommen wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(\Omega_{t_1,t_2}) = \int_{\Omega'_{t_1,t_2}} |\det \mathrm{d}\mathbf{p}|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\Big(\int_0^{r(t(\theta))} r\mathrm{d}r\Big)\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2(t(\theta))\,\mathrm{d}\theta \\ = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r^2(t)\dot\theta(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \square\end{aligned}$$

3 Gewöhnliche Differentialgleichungen 23.4.

3.1 Differentialgleichungen erster Ordnung

3.1.1 Fundamentalsätze

Definition 3.1. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine Vektorfunktion. Eine Kurve $\mathbf{x} : (a, b) \to \Omega$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(\mathbf{x}), \tag{3.1}$$

wenn $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}(t))$ für alle $t \in (a, b)$ gilt. In diesem Fall heißt $\mathbf{x}$ eine Integralkurve von $\mathbf{V}$. Wir nennen Ω den Phasenraum, die Punkte $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ Phasen und die Funktion $\mathbf{V}$ ein Vektorfeld.

Aufgabe 3.2. *Es sei $\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ein Vektorfeld. Es sei $\mathbf{x}_0$ ein Punkt in Ω und $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \Omega$ eine konstante Kurve $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$. Finden Sie hinreichende und notwendige Bedingungen auf $\mathbf{x}_0$, so dass $\mathbf{x}$ eine Lösung von $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(\mathbf{x})$ ist.*

Satz* (Transformationsregel für Vektorfelder)**.** *Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ein Vektorfeld und $\mathbf{X} : \Omega' \to \Omega$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{d}_{\mathbf{x}'}\mathbf{X} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ invertierbar für alle $\mathbf{x}' \in \Omega'$ ist. Es sei dann $\mathbf{V}' : \Omega' \to \mathbb{R}^d$ das Vektorfeld*

$$\mathbf{V}'(\mathbf{x}') := \Big(\mathrm{d}_{\mathbf{x}'}\mathbf{X}\Big)^{-1} \cdot \mathbf{V}\big(\mathbf{X}(\mathbf{x}')\big). \tag{3.2}$$

Wenn $\mathbf{x}' : I \to \Omega'$ eine Integralkurve von $\mathbf{V}'$ (mit Anfang $\mathbf{x}'_0 \in \Omega'$ zur Zeit t_0) ist, gibt $\mathbf{x} := \mathbf{X} \circ \mathbf{x}' : I \to \Omega$ eine Integralkurve von $\mathbf{V}$ (mit Anfang $\mathbf{x}_0 := \mathbf{X}(\mathbf{x}'_0)$ zur Zeit t_0). □

Aufgabe*. *Es sei $\mathbf{p} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2_\times$ die Polarkoordinatenabbildung, die im Abschnitt 2.2.1 eingeführt wurde. Schreiben Sie die transformierten Vektorfelder für die folgenden Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2_\times \cong \mathbb{C}^2 \setminus \mathbf{0}$:*

$$\hat{\mathbf{z}}, \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{z}.$$

Aufgabe 3.3. *Es sei $\mathbf{x} : (a, b) \to \Omega$ eine Integralkurve von $\mathbf{V}$ und für jede $t_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man die Kurve mit Parametrisierung $\mathbf{x}' : (a + t_0, b + t_0) \to \Omega$, die als $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}(t - t_0)$ definiert ist. Zeigen Sie, dass auch $\mathbf{x}'$ eine Integralkurve von $\mathbf{V}$ ist.*

Definition 3.4. Es seien $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir sagen, dass $\mathbf{x} : (a, b) \to \Omega$ eine Integralkurve von $\mathbf{V}$ mit Anfang $\mathbf{x}_0$ zur Zeit t_0 ist, falls $a < t_0 < b$ und $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ zusätzlich gelten.

Satz 3.5 (Lokal eindeutig Lösbarkeit)**.** *Für alle Punkte $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ existiert eine Lösung $\mathbf{x} : (a, b) \to \Omega$ von (3.1) mit Anfang $\mathbf{x}_0$ zur Zeit t_0. Wenn $\mathbf{x}' : (a', b') \to U$ eine andere Lösung mit Anfang $\mathbf{x}_0$ zur Zeit t_0 ist, dann $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}'(t)$ für alle t im Intervall $(a, b) \cap (a', b')$.* □

Aufgabe 3.6. *Es sei $\mathbf{x} : (a,b) \to \Omega$ eine Lösung mit Anfang $\mathbf{x}_0$ zur Zeit t_0. Es seien $t_1 \in (a,b)$ und $\mathbf{x}' : (a',b') \to \Omega$ eine Lösung mit Anfang $\mathbf{x}(t_1)$ zur Zeit 0. Zeigen Sie, dass es eine Lösung $\mathbf{x}'' : (a,b) \cup (a'+t_1, b'+t_1) \to \Omega$ mit Anfang $\mathbf{x}_0$ zur Zeit t_0 existiert.*

Lösung. Wir definieren

$$\mathbf{x}''(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t) & \forall\, t \in (a,b), \\ \mathbf{x}'(t-t_1) & \forall\, t \in (a'+t_1, b'+t_1). \end{cases}$$

Die Kurve $\mathbf{x}''$ ist wohl definiert, wenn die zwei Definitionen über die Schnittmenge $(a,b) \cap (a'+t_1, b'+t_1)$ übereinstimmen. Da $0 \in (a',b')$ ist, folgt $t_1 \in (a'+t_1, b'+t_1)$ und $\mathbf{x}'(t_1-t_1) = \mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}(t_1)$. Da $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ und $t \mapsto \mathbf{x}'(t-t_1)$ beide Lösungen mit gleichem Anfang zur Zeit t_1 sind, leiten wir aus Satz 3.5 her, dass $\mathbf{x}'(t-t_1) = \mathbf{x}(t)$ für alle $t \in (a,b) \cap (a'+t_1, b'+t_1)$. □

Satz 3.7 (Maximale Lösungen sind eindeutig)**.** *Für alle $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ existiert eindeutig eine maximale Lösung $\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0} : I_{\mathbf{x}_0} \to \mathbb{R}$ von* (3.1) *mit Anfang $\mathbf{x}_0$ zur Zeit* 0*, wobei $I_{\mathbf{x}_0} \subset \mathbb{R}$ ein offenes (möglicherweise auf einer oder beiden Seiten unendliches) Intervall ist. Das heißt, dass $I \subset I_{\mathbf{x}_0}$ für alle Lösungen $\mathbf{x} : I \to \Omega$ der obigen DG mit Anfang $\mathbf{x}_0$ zur Zeit* 0 *gilt.* □

Aufgabe 3.8. *Bestimmen Sie die maximale Lösung von $\dot{x} = 1 + x^2$ mit Anfang einem beliebigen $x_0 \in \mathbb{R}$. Was ist I_{x_0}?*

Wann ist dann $I_{\mathbf{x}_0}$ endlich oder unendlich? Die folgenden zwei Sätze geben eine Antwort zu dieser Frage.

Satz 3.9 (Lösungen von endlicher Lebensdauer verlassen jede kompakte Menge)**.** *Es sei angenommen, dass* $\sup I_{\mathbf{x}_0} < +\infty$*. Dann, für alle kompakten Teilmengen K von Ω gibt es $t_K \in I_{\mathbf{x}_0}$ so, dass $\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t) \notin K$ für alle $t \in (t_K, \sup I_{\mathbf{x}_0})$. Eine ähnliche Aussage gilt, wenn* $\inf I_{\mathbf{x}_0} > -\infty$*.* □

Satz 3.10 (Minimale Zeit für das Verlassen eines Balls)**.** *Es sei angenommen, dass der abgeschlossene Ball $\bar{B}_a(\mathbf{x}_0)$ mit Mittelpunkt $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und Radius $a > 0$ in Ω enthalten ist. Dann gilt*

$$I_{\mathbf{x}_0} \supset [-\delta, \delta], \qquad \delta := \frac{a}{\max\limits_{\mathbf{x} \in \bar{B}_a(\mathbf{x}_0)} |\mathbf{V}(\mathbf{x})|} \in (0, +\infty].$$

Beweis. Wenn $\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t) \in \bar{B}_a(\mathbf{x}_0)$ für alle $t \in I_{\mathbf{x}_0} \cap [0, +\infty)$ dann $[0,+\infty) \subset I_{\mathbf{x}_0}$ nach Satz (3.9). Es sei dann angenommen, dass

$$T := \inf \big\{ t \in I_{\mathbf{x}_0} \cap [0, +\infty) \mid \mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t) \notin \bar{B}_a(\mathbf{x}_0) \big\} \in I_{\mathbf{x}_0} \cap (0, +\infty).$$

Dann $|\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(T) - \mathbf{x}_0| = a$ und $\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t) \in \bar{B}_a(\mathbf{x}_0)$ für jede $t \in [0, T]$. Nach dem Fundamentalsatz der Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned} a = |\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(T) - \mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(0)| = \left| \int_0^T \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{x}_0}(t) \mathrm{d}t \right| \le \int_0^T |\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{x}_0}(t)| \mathrm{d}t &= \int_0^T \big|\mathbf{V}(\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t))\big| \mathrm{d}t \\ &\le T \max_{\mathbf{x} \in \bar{B}_a(\mathbf{x}_0)} |\mathbf{V}(\mathbf{x})|. \end{aligned}$$ □

3.1.2 Invariante Mengen

Von zentraler Bedeutung in der Unstersuchung von einer Differentialgleichung sind ihre invarianten Mengen.

Definition 3.11. Wir sagen, dass $M \subset \Omega$ eine invariante Menge für die Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(\mathbf{x})$ ist, wenn $\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t) \in M$ für alle $\mathbf{x}_0 \in M$ und alle $t \in I_{\mathbf{x}_0}$ gilt.

Satz 3.12. *Es sei M eine invariante Menge für $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(\mathbf{x})$. Die folgenden zwei Aussagen sind äquivalent:*

$$(i)\ \ \forall\, \mathbf{x}_0 \in M, \quad I_{\mathbf{x}_0} = \mathbb{R}, \qquad (ii)\ \ \exists\, \delta_M > 0,\ \forall\, \mathbf{x}_0 \in M, \quad I_{\mathbf{x}_0} \supset (-\delta_M, \delta_M).$$

Beweis. Wir zeigen durch Widerspruch, dass (i) eine Folgerung von (ii) ist. Es sei dann angenommen, dass es $\mathbf{x}_0 \in M$ existiert mit $\sup I_{\mathbf{x}_0} < +\infty$ (der Fall $\inf I_{\mathbf{x}_0} > -\infty$ ist ähnlich). Es sei $t_1 \in I_{\mathbf{x}_0}$ mit

$$t_1 > \sup I_{\mathbf{x}_0} - \delta_M$$

und setze man $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t_1)$. Wir wenden Aufgabe (3.6) mit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}$ und $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{\mathbf{x}_1}$ an und gewinnen eine Lösung $\mathbf{x}'' : I_{\mathbf{x}_0} \cup (I_{\mathbf{x}_1} + t_1) \to \Omega$ mit Anfang $\mathbf{x}_0$ zur Zeit 0. Da M invariant ist, folgt es, dass $\mathbf{x}_1 \in M$ und daher

$$I_{\mathbf{x}_1} + t_1 \supset [-\delta_M + t_1, \delta_M + t_1].$$

Aber $\delta_M + t_1 > \sup I_{\mathbf{x}_0}$ impliziert, dass $\sup \big(I_{\mathbf{x}_0} \cup (I_{\mathbf{x}_1} + t_1)\big) > \sup I_{\mathbf{x}_0}$. Diese letzte Ungleichung widerspricht die Maximalität von $\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}$. □

Definition 3.13. Eine Vektorfunktion $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^{d'}$ heißt erstes Integral (oder Konstante der Bewegung), wenn für alle Integralkurven $\mathbf{x} : I \to \Omega$ von $\mathbf{V}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\frac{\mathrm{d}(\mathbf{f} \circ \mathbf{x})}{\mathrm{d}t}(t) = 0, \qquad \forall\, t \in I. \tag{3.3}$$

Das heißt, dass $\mathbf{f}$ konstant entlang der Integralkurven von $\mathbf{V}$ ist oder auch dass die Menge $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) \subset \Omega$ invariant für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d'}$ ist.

Satz 3.14. *Eine Vektorfunktion $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^{d'}$ ist ein erstes Integral für $\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ genau dann, wenn*

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \Omega. \tag{3.4}$$

Wenn $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_{d'})$ lässt sich diese Bedingung als

$$\langle \operatorname{grad} f_i(\mathbf{x}), \mathbf{V}(\mathbf{x}) \rangle = 0, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, \ldots, d'. \tag{3.5}$$

schreiben.

Beweis. Nach der Kettenregel und die Gleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(\mathbf{x})$ ist die Bedingung 3.3 gleichbedeutend mit $\langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}(t)), \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) \rangle = 0$ für alle $t \in I$. Da für alle $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ gibt es eine Lösung von $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(\mathbf{x})$, die durch $\mathbf{x}_0$ läuft, die äquivalenz zwischen (3.3) und (3.4) folgt. □

Aufgabe 3.15. *Es sei $\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert als $\mathbf{V}(x, y) = (-y, x)$. Skizzieren Sie das Vektorfeld $\mathbf{V}$. Besitzt das Vektorfeld ein erstes Integral? Schreiben Sie eine explizite Lösung mit beliebigem Anfang in der komplexen Notation.*

3.2 Gleichungen zweiter Ordnung

Definition 3.16. Es sei $\mathscr{R} \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Menge des $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{M} \in S(k)$ eine positiv definite symmetrische Matrix, die wir *Trägheit* nennen, und $\mathbf{F} : \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ eine Vektorfunktion, die wir *Kraft* nennen. Eine Kurve $\mathbf{r} : (a, b) \to \mathscr{R}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \tag{3.6}$$

wenn $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$ für alle $t \in (a, b)$ gilt. In diesem Fall sagen wir auch, dass die Konfiguration $\mathbf{r}$ sich unter die Kraft $\mathbf{F}$ bewegt. Wenn $\mathbf{M} = m\mathbf{I}_k$ für $m > 0$, dann modelliert die Gleichung der Bewegung des Körpers $\mathbf{r}$ mit Masse m unter der Kraft $\mathbf{F}$.

Es seien nun $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k$ und $t_0 \in (a, b)$ gegeben. Wenn $0 \in I$ und $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\ddot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0$ zusätzlich gelten, sagen wir, dass $\mathbf{r}$ Anfangspunkt $\mathbf{r}_0 \in \mathscr{R}$ und Anfangstangentenvektor $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^k$ zur Zeit t_0 besitzt.

Satz* (Transformationsregel für Kräfte)**.** *Es sei $\mathscr{R} \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\mathbf{F} : \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ eine Vektorfunktion und $\mathbf{R} : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{d}_{\mathbf{r}'}\mathbf{R} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ für alle $\mathbf{r}' \in \mathscr{R}'$ invertierbar ist. Es sei dann $\mathbf{F}' : \mathscr{R}' \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ die Vektorfunktion*

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r}', \mathbf{v}') := \Big(\mathrm{d}_{\mathbf{r}'}\mathbf{R}\Big)^{-1} \cdot \Big(\mathbf{F}\big(\mathbf{R}(\mathbf{r}'), \mathrm{d}_{\mathbf{r}'}\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}'\big) - \mathrm{d}^2_{\mathbf{r}'}\mathbf{R}[\mathbf{v}', \mathbf{v}']\Big), \tag{3.7}$$

wobei die i-te Koordinate von $\mathrm{d}^2_{\mathbf{r}'}\mathbf{R}[\mathbf{v}', \mathbf{v}'] \in \mathbb{R}^k$ die Zahl

$$\mathrm{d}^2_{\mathbf{r}'}\mathbf{R}^i[\mathbf{v}', \mathbf{v}'] := \sum_{j,\ell=1}^{k} \frac{\partial^2 \mathbf{R}^i}{\partial r'_j \partial r'_\ell}(\mathbf{r}') v'_j v'_\ell.$$

ist. Wenn eine Konfiguration $\mathbf{r}' : I \to \mathscr{R}'$ sich unter der Kraft $\mathbf{F}'$ (mit Anfang $(\mathbf{r}'_0, \mathbf{v}'_0) \in \mathscr{R}' \times \mathbb{R}^k$) bewegt, bewegt sich dann die Konfiguration $\mathbf{r} := \mathbf{R} \circ \mathbf{r}' : I \to \mathscr{R}$ unter der Kraft $\mathbf{F}$ (mit Anfang $(\mathbf{R}(\mathbf{r}'_0), \mathrm{d}_{\mathbf{r}'_0}\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}'_0) \in \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k$).

Aufgabe*. *Es sei $\mathbf{p} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2_\times$ die Polarkoordinatenabbildung, die in Aufgabe 2.2.1 eingeführt wurde. Schreiben Sie die transformierte Kraft für die folgenden Kräfte auf $\mathbb{R}^2_\times$:*

$$\hat{\mathbf{z}}, \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{z}.$$

Aufgabe 3.17. *Es sei $\mathbf{r} : (a, b) \to \mathscr{R}$ eine Lösung von $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, also die Kraft $\mathbf{F}$ hängt nicht von $\dot{\mathbf{r}}$ ab. Für jede $t_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man die Kurven $\mathbf{r}' : (a + t_0, b + t_0) \to \mathscr{R}$ und $\mathbf{r}'' : (-a + t_0, -b + t_0) \to \mathscr{R}$, die als $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t - t_0)$ und $\mathbf{r}''(t) = \mathbf{r}(-t - t_0)$ definiert sind. Zeigen Sie, dass auch $\mathbf{r}'$ und $\mathbf{r}''$ sich unter der Kraft $\mathbf{F}$ bewegen.*

Satz 3.18. *Eine Konfiguration $\mathbf{r} : I \to \mathscr{R}$ bewegt sich unter der Kraft $\mathbf{F}$ genau dann, wenn $\mathbf{x} := (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) : I \to \Omega := \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k$, eine Integralkurve des folgenden Vektorfelds ist:*

$$\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k, \qquad \mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \end{pmatrix} \qquad \forall\, (\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \Omega.$$

Beweis. Es sei $(\mathbf{r},\mathbf{v}) : I \to \Omega$ eine Kurve. Die Gleichung $(\dot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{V}(\mathbf{r},\mathbf{v})$ kann man als ein System $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v},\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{v})$ umschreiben. Dieses System ist äquivalent zum System $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}},\ \mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$, wie gewünscht. □

Mit Hilfe von Satz 3.18 kann man die Resultate aus den Sätzen 3.5, 3.7, 3.9, 3.12 und die Definition von ersten Integralen zu den Gleichungen zweiter Ordnung entsprechend anpassen.

Aufgabe 3.19. *Finden Sie alle maximale Lösungen der Gleichung* $\ddot{r} = \frac{1}{2}\dot{r}^3$, $r \in \mathbb{R}$. *Zeigen Sie, dass* $\sup I_{(r_0,v_0)} < +\infty$, *falls* $(r_0,v_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. *In diesem Fall finden Sie eine kompakte Menge* $K_{(r_0,v_0)} \subset \mathbb{R}$ *und eine Folge* $t_i \to \sup I_{(r_0,v_0)}$, *sodass* $r_{(r_0,v_0)}(t_i) \in K_{(r_0,v_0)}$. *Wiederspricht dieses Beispiel Satz* 3.9*? Was ist der Limes der Folge* $\dot{r}_{(r_0,v_0)}(t_i)$*?*

4 Konservative Kräfte und zentrale Kräfte 26.4.

Wir führen nun eine besondere Klasse von Kräften $\mathbf{F}$, die ein erstes Integral besitzen, das ein besseres Verhalten der Lösungskurven von $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ garantiert.

4.1 Konservative Kräfte

Definition 4.1. Eine Kraft $\mathbf{F} : \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ heißt konservativ, wenn

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - \operatorname{grad} U(\mathbf{r}), \tag{4.1}$$

wobei $U : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, das sogenannte Potential, und $\mathbf{A} : \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k \to A(k)$ ein Feld von antisymmetrischen Matrizen sind. Die Energiefunktion $E : \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2_{\mathbf{M}} + U(\mathbf{r}).$$

Aufgabe 4.2. *Es sei $\mathbf{F} : \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ eine konservative Kraft. Es sei $\mathbf{r}_0$ ein Punkt in $\mathscr{R}$ und $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathscr{R}$ eine konstante Kurve $\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{r}_0$. Finden Sie hinreichende und notwendige Bedingungen auf $\mathbf{r}_0$, so dass $\mathbf{r}$ eine Lösung von $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ ist.*

Satz 4.3. *Wenn $\mathbf{F} : \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ eine konservative Kraft ist, ist dann die zugehörige Energiefunktion ein erstes Integral für die Gleichung $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.*

Beweis. Wir rechnen

$$\operatorname{grad} E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} U(\mathbf{r}) \\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

Daher,

$$\begin{aligned} \left\langle \operatorname{grad} E(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \end{pmatrix} \right\rangle &= \langle \operatorname{grad} U(\mathbf{r}), \mathbf{v} \rangle + \big\langle \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{M}^{-1}\big(\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - \operatorname{grad} U(\mathbf{r})\big)\big\rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

und der letzte Term verschwindet, denn $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ist antisymmetrisch. Die Aussage folgt jetzt aus Satz 3.14. □

Für konservative Kräfte sind dann die Niveaumenge $E^{-1}(h)$ invariant für jede $h \in \mathbb{R}$. Genauere Informationen gewinnen wir, wenn wir die sogenannten Hillsregionen betrachten. Die sind definiert als

$$U^{\leq h} := \{\mathbf{r} \in \Omega \mid U(\mathbf{r}) \leq h\}, \qquad h \in \mathbb{R}.$$

Satz 4.4. *Es seien $\mathbf{F}$ eine konservative Kraft und $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k$. Es gilt*

$$\mathbf{r}_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0}(t) \in U^{\leq E(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)}, \qquad \forall\, t \in I_{(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)}.$$

Insbesondere, wenn $h \in \mathbb{R}$ und $U_*^{\leq h}$ eine zusammenhängende Komponente von $U^{\leq h}$ ist, ist

$$\big(U_*^{\leq h} \times \mathbb{R}^k\big) \cap E^{-1}(h)$$

eine invariante Menge.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus $E(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) = \frac{1}{2}|\mathbf{v}_0|^2_{\mathbf{M}} + U(\mathbf{r}_0) \geq U(\mathbf{r}_0)$. Es sei nun $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \big(U_*^{\leq h} \times \mathbb{R}^k\big) \cap E^{-1}(h)$ und betrachte man die maximale Lösung $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} : I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} \to \mathscr{R}$. Für alle $t \in I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}$ gilt $E(\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t), \dot{\mathbf{r}}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t)) = h$ und die erste Aussage impliziert daher $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t) \in U^{\leq h}$. Für alle $T \in I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}$ verbindet dann die Kurve $t \mapsto \mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t),\ t \in [0, T]$ den Punkt $\mathbf{r}_0$ mit dem Punkt $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(T)$ innerhalb $U^{\leq h}$. Es folgt daraus, dass $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(T) \in U^{\leq h}$ wie gewünscht. □

Aufgabe 4.5. *Beschreiben Sie in Abhängigkeit von h die Hillsregionen für die folgenden auf $\mathbb{R}^2$ definierten Funktionen:*

$$U(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{r} \rangle, \quad \mathbf{u} \in S^1, \qquad U(\mathbf{r}) = x^2 + y^2, \qquad U(\mathbf{r}) = -x^2 - y^2, \qquad U(\mathbf{r}) = x^2 - y^2.$$

Die Existenz der Energiefunktion impliziert die folgenden zwei verbesserten Versionen der Sätze 3.9 und 3.10. Insbesonder sollte man den ersten Satz hier unten mit Aufgabe 3.19 verglichen werden.

Satz 4.6. *Es sei $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} : I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} \to \mathscr{R}$ die maximale Lösung von (4.1) mit Anfang $\mathbf{r}_0$ und Anfangtangentenvektor $\mathbf{v}_0$. Es sei angenommen, dass $\sup I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} < +\infty$. Dann, für alle kompakten Teilmengen K von $\mathscr{R}$ existiert $t_K \in I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}$ so, dass $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t) \notin K$ für alle $t \in (t_K, \sup I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)})$. Eine ähnliche Aussage gilt, wenn $\inf I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} > -\infty$.*

Beweis. Wir setzen $h := E(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ und für jede kompakte Menge $K \subset \mathscr{R}$ definieren wir

$$K' = (K \times \mathbb{R}^k) \cap E^{-1}(h).$$

Wir zeigen, dass auch $K' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ kompakt ist. Es reicht zu beweisen, dass K' abgeschlossen und beschränkt ist. Die Menge K' ist abgeschlossen, weil $K \times \mathbb{R}^k$ und $E^{-1}(h)$ abgeschlossen sind. Zu zeigen, dass auch beschränkt ist, finden wir positive Konstanten C_1, C_2, sodass, wenn $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in K'$, dann $r \leq C_1$ und $|\mathbf{v}|_{\mathbf{M}} \leq C_2$. Da nach Voraussetzung $\mathbf{r} \in K$ gilt, ist die Existenz von C_1 unmittelbar. Nach der Definition von E bekommen wir

$$|\mathbf{v}|_{\mathbf{M}} = \sqrt{2(h - U(\mathbf{r}))} \leq \sqrt{2\big(h - \min_K U\big)} =: C_2.$$

Nach Satz 3.9 gibt es eine Zeit $t_{K'} \in I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}$ mit $(\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t), \dot{\mathbf{r}}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t)) \notin K'$ für alle Zeiten $t \in (t_{K'}, \sup I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)})$. Da $(\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t), \dot{\mathbf{r}}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t)) \in E^{-1}(h)$ folgt, dass $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t) \notin K$. Wir können $t_K := t_{K'}$ nehmen und der Satz ist bewiesen. □

Satz 4.7. *Es sei $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k$ mit $h := E(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$. Wir nehmen an, dass der abgeschlossene Ball $\bar{B}_a(\mathbf{r}_0)$ mit Mittelpunkt $\mathbf{r}_0 \in \Omega$ und Radius a in $\mathscr{R}$ enthalten ist. Wenn $\lambda_{\mathbf{M}}$ der kleinste Eigenwert von $\mathbf{M}$ ist, gilt*

$$I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} \supset [-\delta, \delta], \qquad \delta := \sqrt{\frac{\lambda_{\mathbf{M}}}{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{h - \min\limits_{\bar{B}_a(\mathbf{r}_0)} U}}.$$

Beweis. Wenn $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t) \in \bar{B}_a(\mathbf{r}_0)$ für alle $t \in I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} \cap [0,+\infty)$ dann $[0,+\infty) \subset I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}$ nach dem Satz (4.6). Es sei dann angenommen, dass

$$T := \inf\left\{t \in I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} \cap [0,+\infty) \mid \mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t) \notin \bar{B}_a(\mathbf{r}_0)\right\} \in I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} \cap (0,+\infty).$$

Dann $|\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(T) - \mathbf{r}_0| = a$ und $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t) \in \bar{B}_a(\mathbf{r}_0)$ für jede $t \in [0,T]$. Nach dem Fundamentalsatz der Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned}
\sqrt{\lambda_{\mathbf{M}}}a = \sqrt{\lambda_{\mathbf{M}}}|\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(T) - \mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(0)| =& \sqrt{\lambda_{\mathbf{M}}}\left|\int_0^T \dot{\mathbf{r}}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^T \sqrt{\lambda_{\mathbf{M}}}|\dot{\mathbf{r}}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t)|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^T |\dot{\mathbf{r}}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t)|_{\mathbf{M}}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \sqrt{2}\sqrt{h - U(\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t))}\mathrm{d}t \\
&\leq T\sqrt{2}\sqrt{h - \min_{\mathbf{r}\in\bar{B}_a(\mathbf{r}_0)} U(\mathbf{r})}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Wir lassen nun für wenige Augenblicke die Welt der konservativen Kräfte und fokussieren uns auf eine Klasse von Kräften, die uns helfen, das keplersche Problem zu lösen.

4.2 Zentralkräfte

Wir betrachten die Trägheit $\mathbf{M} = m\mathbf{I}_3$ und eine Kraft $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3_\times \to \mathbb{R}^3$ der Art

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{r}},$$

wobei $f : \mathbb{R}^3_\times \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist. Also, die Kraft $\mathbf{F}$ ist entlang der Verbindungslinie zwischen $\mathbf{0}$ und dem Körper im Punkt $\mathbf{r}$ gerichtet. Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir an, dass $m = 1$. In diesem Fall wird die Gleichung $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Definition 4.8. Der Drehimpuls um $\mathbf{0}$ ist die Vektorfunktion

$$\mathbf{c} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{c}(\mathbf{r},\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

Wenn $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve ist, lässt sich ihr Drehimpuls auf folgender Weise schreiben:

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) = \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Aufgabe 4.9. *Nach Satz* 4.12 *können wir ein Koordinatensystem so wählen, dass Es sei* $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), 0)$ *eine Kurve, die in der Ebene* $\{z = 0\}$ *enthalten ist und seien* $t \mapsto (r(t), \theta(t))$ *die Polarkoordinaten für die Kurve* $t \mapsto (x(t), y(t))$. *Es gilt die Formel*

$$\mathbf{c} = (0, 0, r^2\dot{\theta}).$$

Satz 4.10. *Es sei* $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ *ein Element von* $\mathbb{R}^3_\times \times \mathbb{R}^3$. *Es gilt*

$$(i) \ \ \langle \mathbf{c}, \mathbf{r} \rangle = 0, \qquad (ii) \ \ \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{r}} \rangle \, \hat{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{c}}{r} \times \hat{\mathbf{r}}, \qquad (iii) \ \ v^2 = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{r}} \rangle^2 + \frac{c^2}{r^2}.$$

Insbesondere, wenn $\mathbf{c} \neq 0$ *und* $\mathbf{i}$ *die Drehung um neunzig Graden in der Ebene senkrecht zu* $\mathbf{c}$ *ist, dann gilt*

$$c = \langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle. \tag{4.2}$$

Es sei nun $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3_\times$ *eine Kurve und setze man* $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}}$. *Dann*

$$(iv) \ \ \dot{r} = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{r}} \rangle, \qquad (v) \ \ \dot{\hat{\mathbf{r}}} = \frac{\mathbf{c} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

Beweis. Da $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ senkrecht zu $\mathbf{r}$ und $\mathbf{v}$ ist, folgt es, dass $\langle \mathbf{c}, \mathbf{r} \rangle = 0$. Die Formel (ii) ist klar, wenn $\hat{\mathbf{r}}$ und $\mathbf{v}$ parallel sind. Falls sie nicht parallel sind, bilden $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{r}}$ eine positive orthonormale Basis des $\mathbb{R}^3$. Wir berechnen die Koeffizienten von $\mathbf{v}$ in dieser Basis

$$\langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{c}} \rangle = 0, \qquad \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{r}} \rangle = \frac{1}{cr} \langle \mathbf{v}, (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{cr} \langle \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rangle = \frac{c}{r}. \tag{4.3}$$

Die Formel (iii) folgt nun unmittelbar aus (ii), weil $\hat{\mathbf{r}}$ und $\mathbf{c} \times \hat{\mathbf{r}}$. Wenn $\mathbf{c} \neq 0$ haben wir $\hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{r}}$, so dass (4.2) aus (4.3) folgt. Für (iv) berechnen wir

$$\langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{r}} \rangle = \frac{1}{r} \langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{2r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{2r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r^2 = \frac{2r\dot{r}}{2r} = \dot{r}.$$

Formel (v) folgt aus (ii) und (iv):

$$\frac{\mathbf{c} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{r\dot{\mathbf{r}} - \dot{r}\mathbf{r}}{r^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \dot{\hat{\mathbf{r}}}.$$

□

Aufgabe 4.11. *Es sei* $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3_\times$ *eine Kurve mit* $\dot{\mathbf{c}}(t) = 0$ *für alle* $t \in I$. *Dann*

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} \right) \hat{\mathbf{r}}.$$

Satz 4.12. *Der Drehimpuls* $\mathbf{c}$ *ist ein erstes Integral für* $\ddot{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, *wenn* $\mathbf{F}$ *zentral ist. Außerdem, wenn eine Lösung* $\mathbf{r}$ *einen Drehimpuls* $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ *besitzt, liegt dann* $\mathbf{r}$ *auf der orientierten Ebene* $\alpha_{\mathbf{r}} := \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{s}, \mathbf{c} \rangle = 0\}$, *wobei die Orientierung durch den Vektor* $\mathbf{c}$ *gegeben ist. Wenn* $\mathbf{r}$ *einen Drehimpuls* $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ *besitzt, liegt* $\mathbf{r}$ *auf einer Halbgerade mit Anfang in* $\mathbf{0}$. *Das heißt, dass es* $\mathbf{u}_0 \in S^2$ *gibt mit der Eigenschaft* $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_0$ *und* $\ddot{r} = -f(r\mathbf{u}_0)$.

Beweis. Wir benutzen Satz 3.14:

$$\mathrm{d}_{(\mathbf{r},\mathbf{v})}\mathbf{c} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 - f(\mathbf{r}) \, \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} = 0.$$

Es sei nun $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ eine Lösung von $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ mit $\mathbf{c}(t) \equiv \mathbf{c}_0$. Wenn $\mathbf{c}_0 \neq 0$, gehört $\mathbf{r}$ zur Ebene $\alpha_{\mathbf{r}}$ nach Satz 4.10.(i). Wenn $\mathbf{c}_0 = 0$, haben wir $\dot{\hat{\mathbf{r}}} = 0$ nach Satz 4.10.(iii). Also $\hat{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{u}_0 \in S^2$, wie gewünscht. □

Satz 4.13 (Zweites keplersches Gesetz)**.** *Es sei* $\mathbf{r}$ *eine Lösung von* $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$*, wobei* $\mathbf{F}$ *eine Zentralkraft ist. Der Vektor* $\mathbf{r}$ *überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Fläche.*

Beweis. Die Aussage ist klar, wenn $\mathbf{c} = 0$. Wenn $\mathbf{c} \neq 0$, wählen wir ein Koordinatensystem so, dass $\mathbf{c} = (0, 0, c)$ mit $c > 0$. Dann $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ und $c = r^2\dot{\theta}$. Insbesondere ist θ eine monoton wachsende Funktion der Zeit t. Es seien $t_1 < t_2$ beliebig mit $\theta(t_2) - \theta(t_1) < 2\pi$ und man definiere $\Omega_{t_1,t_2} = \{s\mathbf{r}(t) \mid s \in [0, 1],\ t \in [t_1, t_2]\}$. Nach dem Satz 2.3 gilt

$$\mathrm{Area}(\Omega_{t_1,t_2}) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} c \, \mathrm{d}t = \frac{c}{2} \cdot (t_2 - t_1).$$

Also, der Flächeinhalt von Ω_{t_1,t_2} hängt von t_1 oder t_2 nur durch ihre Differenz ab. $\square$

5 Konservative zentrale Kräfte 3.5.

5.1 Klassifizierung

Satz 5.1. *Eine Zentralkraft ist konservativ genau dann, wenn f nur von dem Abstand r von $\mathbf{0}$ abhängt. Das heißt, dass es eine Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f = \tilde{f} \circ r$ gibt. In diesem Fall lässt sich auch das Potential $U : \mathbb{R}^3_\times \to \mathbb{R}$ als $U = \tilde{U} \circ r$ schreiben, wobei die Funktion $\tilde{U} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ durch die Gleichung*

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{U}}{\mathrm{d}r} = \tilde{f}$$

bis auf einer additiven Konstante bestimmt wird.

Beweis. Es sei angenommen, dass $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U$. Dann die Rotation von $\mathbf{F}$ verschwindet

$$0 = \operatorname{rot} \mathbf{F} = -\operatorname{rot}\big(f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}\big) = -\operatorname{grad} f \times \hat{\mathbf{r}} - f(\mathbf{r})\operatorname{rot} \hat{\mathbf{r}} = -\operatorname{grad} f \times \hat{\mathbf{r}},$$

wo wir benutzt haben, dass die Rotation von $\hat{\mathbf{r}}$ verschwindet, weil $\hat{\mathbf{r}} = \operatorname{grad} r$. Es folgt daraus, dass $\operatorname{grad} f$ parallel zum $\mathbf{r}$ ist. Es seien nun $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$ zwei Punkte in $\mathbb{R}^3_\times$ mit $br_0 = br_1$. Es existiert dann eine Kurve $\mathbf{r} : [0,1] \to \{r = r_0\}$ mit $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ und $\mathbf{r}(1) = \mathbf{r}_1$. Wir leiten die Gleichung $\langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t) \rangle \equiv r_0^2$ nach t ab und bekommen $\langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = 0$. Nach dem Fundamentalsatz der Integralrechnung

$$f(\mathbf{r}_1) - f(\mathbf{r}_0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(f \circ \mathbf{r})}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \int_0^1 \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{r}(t)), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle \mathrm{d}t = 0,$$

denn $\operatorname{grad} f$ parallel zu $\mathbf{r}$ ist.

Es sei umgekehrt angenommen, dass $f = \tilde{f} \circ r$ und es sei $\tilde{U}$ definiert durch $\frac{\mathrm{d}\tilde{U}}{\mathrm{d}r} = \tilde{f}$. Dann

$$\mathbf{F} = -(\tilde{f} \circ r)\hat{\mathbf{r}} = -\Big(\frac{\mathrm{d}\tilde{U}}{\mathrm{d}r} \circ r\Big) \operatorname{grad} r = -\operatorname{grad} (\tilde{U} \circ r). \qquad \square$$

Aufgabe 5.2. *Es sei $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3_\times \to \mathbb{R}^3$ eine konservative Zentralkraft und $\mathbf{Q} \in O(3)$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3_\times$ eine Lösung von $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist, genau dann wenn $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3_\times$ eine Lösung von $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist.*

Explizite Lösungen von $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, wobei $\mathbf{F}$ eine konservative Zentralkraft ist, sind nur für wenige Potentiale $\tilde{U} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bekannt. Einer der berühmten Fällen ist der Folgende.

Beispiel 5.3 (Der isotrope harmonische Oszillator)**.** Es sei $\tilde{U}(r) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2$, wobei $\omega > 0$. In diesem Fall lautet die Gleichung $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r},$$

sodass die rechte Seite auf dem ganzen $\mathbb{R}^3$ glatt ist (keine Singularität in $\mathbf{0}$). Wir suchen nach Lösungen, die in der xy-Ebene definiert sind. Also sind Funktionen x und y zu finden, die die Gleichungen

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \ddot{y} = -\omega^2 y$$

erfüllen. Eine Lösung mit beliebigen Anfangspunkt $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ und Anfangstangentenvektor $(\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (v_0^x, v_0^y)$ ist durch die Formeln

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0^x}{\omega} \sin \omega t, \qquad y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0^y}{\omega} \sin \omega t$$

gegeben. Insbesondere sind die maximalen Lösungen für alle reellen Zeiten definiert und besitzen eine Periode $2\pi/\omega$, die daher unabhängig von den Anfangswerten ist. Aus der Periodizität folgt, dass es ein $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt, wo $t \mapsto x^2(t) + y^2(t)$ ihr Maximum erhält. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, kann man $t_0 = 0$ und $(x_0, y_0) = (a, 0)$, wobei $a \geq 0$, annehmen. Nach der Definition von t_0 stehen (x_0, y_0) und (v_0^x, v_0^y) senkrecht zueinander. Daher $(v_0^x, v_0^y) = (0, b\omega)$ mit $b \in \mathbb{R}$. Bis auf der Umparametrisierung $t \mapsto -t$ haben wir $b \geq 0$. Die obigen Gleichung nehmen daher eine einfachere Gestalt

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{pmatrix}.$$

Die Kurve (x, y) parametrisiert eine Ellipse mit Mittelpunkt in $\mathbf{0}$ und Halbachsen a und b gegen den Uhrzeigersinn.

Aufgabe 5.4. *Es sei* $\mathbf{r}$ *eine Lösung von* $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}$ *mit Energie* $h > 0$ *und Drehimpuls* $(0, 0, c)$ *mit* $c \in \mathbb{R}$*. Zeigen Sie, dass* $h \geq \omega|c|$ *und dass die Halbachsen der Ellipse durch die Formel*

$$\frac{1}{\sqrt{2}\omega}\Big(\sqrt{h + \omega|c|} \pm \sqrt{h - \omega|c|}\Big)$$

gegeben sind.

5.2 Reduzierung zu einer Dimension

Satz 5.5. *Es sei* $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3_\times$ *eine Lösung von* $\ddot{\mathbf{r}} = -\tilde{f}(r)\hat{\mathbf{r}}$ *in der Ebene* $\{z = 0\}$*, so dass* $\mathbf{c} = (0, 0, c)$*, für* $c \in \mathbb{R}$*. Wenn* (r, θ) *die Polarkoordinaten von* $\mathbf{r}$ *sind und das effektive Potential* $\tilde{U}_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *als*

$$\tilde{U}_c(r) := \frac{c^2}{2r^2} + \tilde{U}(r)$$

definiert wird, gilt

$$\begin{cases} \ddot{r} = -\dfrac{\mathrm{d}\tilde{U}_c}{\mathrm{d}r}(r) \\ \dot{\theta} = \dfrac{c}{r^2}. \end{cases} \tag{5.1}$$

Insbesondere, bewegt sich r *unter einer konservativen Kraft mit entsprechender Energie* $\tilde{E}_c : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und es gilt* $\tilde{E}_c(r, \dot{r}) = E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.

Beweis. Die zweite Gleichung in (5.1) folgt aus Aufgabe 4.9. Für die erste Gleichung kann man entweder Aufgabe 4.9 benutzen oder wie folgendes argumentieren. Man berechne nach Satz 4.10.(iii)

$$E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}\Big(\dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2}\Big) + \tilde{U}(r) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \tilde{U}_c(r) = \tilde{E}_c(r, \dot{r}).$$

Da E ein erstes Integral ist, liefert das Ableiten nach t der obigen Gleichung

$$0 = \dot{r}\Big(\ddot{r} + \frac{\mathrm{d}\tilde{U}_c}{\mathrm{d}r}\Big).$$

Wenn $\ddot{r}(t_0) + \frac{\mathrm{d}\tilde{U}_c}{\mathrm{d}r}(r(t_0)) \neq 0$ für irgendwelche $t_0 \in I$ gelten würde, gäbe es ein offenes Intervall $J \subset I$ mit $t_0 \in J$ und $\dot{r}(t) \equiv 0$, für alle $t \in J$. Insbesondere, $\frac{\mathrm{d}\tilde{U}_c}{\mathrm{d}r}(r(t)) \neq 0$, denn $\ddot{r}(t) = 0$. Außerdem, $r(t) \equiv r_0$ und wir können zweimal die Identität $\langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t)\rangle = r_0^2$ nach t ableiten und bekommen

$$0 = \langle \ddot{r}, \mathbf{r}\rangle + \langle \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}\rangle.$$

Wir setzen die Gleichung $\ddot{\mathbf{r}} = -\tilde{f}(r)\hat{\mathbf{r}}$ und die Formel in Satz 4.10.(iii) ein und finden den Widerspruch

$$0 = \tilde{f}(r(t)) - \frac{c^2}{r(t)^3} = \frac{\mathrm{d}\tilde{U}_c}{\mathrm{d}r}(r(t)). \qquad \square$$

Aufgabe 5.6. *Es sei* $\mathbf{F}$ *eine konservative Zentralkraft und* $r_0 \in \mathbb{R}^+$*. Es existiert eine Lösung* $\mathbf{r}$ *von* $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$*, die sich in einem Kreis um* $\mathbf{0}$ *mit Radius* r_0 *bewegt, genau dann, wenn* $\tilde{f}(r_0) < 0$*. In diesem Fall ist die Winkelgeschwindigkeit konstant und die Periode lautet*

$$T(r_0) = 2\pi\sqrt{\frac{r_0}{\tilde{f}(r_0)}}.$$

Satz*. *Es sei* $\mathbf{F}$ *eine konservative Zentralkraft und* $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3_\times$ *eine Lösung von* $\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *in der Ebene* $\{z = 0\}$ *mit* $\mathbf{c} = (0, 0, c)$ *und* $c \neq 0$*. Wenn* $t : J \to I$ *die Inversefunktion von* $\theta : I \to \mathbb{R}$ *ist, definieren wir*

$$s : J \to \mathbb{R}^+, \qquad s(\theta) = \frac{1}{r(t(\theta))}, \qquad \forall\, \theta \in J.$$

Wenn $\tilde{\tilde{U}}_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *gegeben durch* $\tilde{\tilde{U}}_c(s) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{c^2}\tilde{U}(1/s)$ *ist, haben wir*

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\theta^2} = -\frac{\mathrm{d}\tilde{\tilde{U}}_c(s)}{\mathrm{d}s}.$$

Insbesondere bewegt sich s *unter einer konservativen Kraft mit entsprechender Energie*

$$\tilde{\tilde{E}}_c : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{\tilde{E}}_c(s, v_s) = \frac{v_s^2}{2} + \tilde{\tilde{U}}_c(s).$$

Es gilt $\tilde{\tilde{E}}_c(s, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}) = \frac{1}{c^2}\tilde{E}_c(r, \dot{r})$*.*

Eine Lösung $r : I \to \mathbb{R}^+$ der ersten Gleichung in (5.1) stellt die Bewegung einer Punktmasse in $\mathbb{R}^+$ unter einer konservativen Kraft dar. Wenn eine solche Lösung gegeben ist, gewinnen wir die einzige Lösung $\theta_{\theta_0} : I \to \mathbb{R}$ der zweiten Gleichung mit Anfang θ_0 zur Zeit $t_0 \in I$ durch Integrierung

$$\theta_{\theta_0}(t) = \theta_0 + c\int_{t_0}^{t} \frac{1}{r^2(\tau)}\mathrm{d}\tau, \qquad \forall\, t \in I.$$

Daher studieren wir jetzt genauer konservative Kräfte auf $\mathbb{R}^+$.

5.3 Konservative Kräfte auf $\mathbb{R}^+$: maximale Lösungen

Es sei nun $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und betrachten wir die Gleichung

$$\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r).$$

In diesem Fall sind die Niveaumengen $E^{-1}(h)$ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ enthalten und man kann ein qualitatives Verständnis der Geometrie der Bahnen vom Skizzieren dieser Mengen schon gewinnen, denn sie invariant sind.

Aufgabe*. *Skizzieren Sie die Mengen $E^{-1}(h)$ für die Potentiale*

$$U_1(r) = \frac{1}{2}r^2 + 11r - 6\log r + \frac{6}{r}, \qquad U_2(r) = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r}, \quad U_3(r) = -r - \frac{1}{r}$$

Hiweis: zeichnen Sie den Graph des Potentiales, indem Sie seine Ableitung berechnen.

Was die Dynamik angeht stellen wir hier unten drei Resultate vor. Das erste gibt uns eine Bedingung, für die alle die maximalen Lösungen für alle reellen Zeiten definiert sind.

Satz 5.7. *Es sei angenommen, dass*

$$(i) \quad \limsup_{r\to 0} U(r) = +\infty$$

und man nehme $(r_1, v_1) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Die Bahn $r_{(r_1,v_1)}$ ist nach unten von einer positiven Zahl beschränkt. Wenn zusätzlich

$$(ii) \quad \liminf_{r\to+\infty} \frac{U(r)}{r^2} > -\infty.$$

gilt, haben wir $I_{(r_1,v_1)} = \mathbb{R}$. Wenn statt (ii), die Bedingung

$$(iii) \quad \limsup_{r\to+\infty} U(r) = +\infty$$

zusammen mit (i) gilt, ist $r_{(r_1,v_1)}$ nach oben von einer positiven Zahl beschränkt und daher folgt $I_{(r_1,v_1)} = \mathbb{R}$ auch in diesem Fall.

Beweis. Es sei zuerst nur die Bedingung (i) angenommen. Dann gilt

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} = \bigcup_{h\in\mathbb{R},\ r_0 \notin U^{\le h}} \big([r_0, +\infty) \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h).$$

Das ist klar, denn für jedes $(r_1, v_1) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ mit $h := E(r_1, v_1)$ gibt es ein $r_0 \in (0, r_1)$ mit $U(r_0) > h$, also $r_0 \notin U^{\le h}$. Außerdem ist jede Menge $\big([r_0, +\infty) \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h)$ invariant. Um solche Aussage zu beweisen, nehmen wir $(r_1, v_1) \in \big([r_0, +\infty) \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h)$ und es sei $U^{\le h}_*$ die zusammenhängende Komponente von $U^{\le h}$, die r_1 enthält. Wir haben $U^{\le h}_* \subset [r_0, +\infty)$, denn $r_0 \notin U^{\le h}$. Die Aussage folgt dann aus Satz 4.4. Es sei nun die Bedingung (ii) zusätzlich angenommen. Um die gewünschte Behauptung zu beweisen, bleibt es wegen des Satzes 3.12 nur zu zeigen, dass es für alle $(r_0, h) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ein $\delta_{r_0,h} > 0$ gibt mit

$$I_{(r_1,v_1)} \supset (-\delta_{(r_0,h)}, \delta_{(r_0,h)}) \qquad \forall\,(r_1, v_1) \in \big([r_0, +\infty) \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h).$$

Nach (ii) gibt es $C_{(r_0,h)} > 0$ mit

$$\frac{U(r) - h}{r^2} > -C_{(r_0,h)}, \qquad \forall r \in [+\infty).$$

Es sei nun $(r_1, v_1) \in (r_1, v_1) \in \big([r_0, +\infty) \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h)$. Wir haben, dass

$$\bar{B}_{r_1 - r_0/2}(r_1) \subset [r_0/2, 2r_1]$$

und aus der obigen Ungleichung folgt

$$h - U(r) \leq 4C_{(r_0,h)} r_1^2, \qquad \forall\, r \in \bar{B}_{r_1 - r_0/2}(r_1).$$

Nach Satz (4.7) wissen wir, dass $I_{(r_1,v_1)} \supset [-\delta, \delta]$, wobei

$$\delta := \frac{r_1 - r_0/2}{\sqrt{2}\sqrt{h - \min\limits_{\bar{B}_{r_1-r_0/2}(r_1)} U}} \geq \frac{r_1 - r_1/2}{\sqrt{2}\sqrt{4C_{(r_0,h)} r_1^2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}C_{(r_0,h)}}.$$

Also die Behauptung ist bewiesen mit $\delta_{(r_0,h)} := (4\sqrt{2}C_{(r_0,h)})^{-1}$.

Es sei nun die Bedingung (iii) statt (ii) angenommen. Wie im ersten Teil des Beweises folgt es, dass

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} = \bigcup_{h \in \mathbb{R},\ r_2 \notin U^{\leq h}} \big((0, r_2] \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h)$$

und jede Menge in der Vereinigung ist invariant. Das impliziert, dass alle die Bahnen $r_{(r_1,v_1)}$ auch beschränkt von oben sind. Die Gleichung $I_{(r_1,v_1)}$ ist nun eine Folgerung von Satz 4.6. ☐

Folgerung 5.8. *Es sei* $\mathbf{F}$ *eine konservative Zentralkraft mit Potential* $\tilde{U} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. *Es sei angenommen, dass*

$$(i)' \quad \limsup_{r \to 0} r^2 \tilde{U}(r) \geq 0$$

und man nehme $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) \in \mathbb{R}^3_\times \times \mathbb{R}^3$ *mit* $\mathbf{c} \neq 0$ *und zugehörender maximaler Lösung* $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1)}$. *Dann ist* $|\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1)}|$ *nach unten von einer positiven Zahl beschränkt. Wenn zusätzlich*

$$(ii)' \quad \liminf_{r \to +\infty} \frac{\tilde{U}(r)}{r^2} > -\infty.$$

gilt, haben wir $I_{(\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1)} = \mathbb{R}$. *Wenn statt* $(ii)'$, *die Bedingung*

$$(iii)' \quad \limsup_{r \to +\infty} \tilde{U}(r) = +\infty$$

zusammen mit $(i)'$ *gilt, ist* $|\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1)}|$ *nach oben von einer positiven Zahl beschränkt und daher folgt* $I_{(\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1)} = \mathbb{R}$ *auch in diesem Fall.*

Beweis. Die Behauptungen folgen aus Satz 5.7, wenn wir zeigen, dass $(i)'$, $(ii)'$ und $(iii)'$ jeweils (i), (ii) und (iii) für das effektive Potential $\tilde{U}_c(r) = \frac{c^2}{2r^2} + \tilde{U}(r)$ implizieren. Die Bedingungen (ii) und (iii) sind klar, weil

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c^2}{2r^2} = 0.$$

Nach $(i)'$ existiert eine Folge $(r_i) \subset\in \mathbb{R}^+$ mit $r_i \to 0$ und $r_i^2 \tilde{U}(r_i) \geq -\frac{1}{4}c^2$. Das impliziert

$$\lim_{i\to+\infty} \tilde{U}_c(r_i) = \lim_{i\to+\infty} \frac{c^2 + 2r_i^2 \tilde{U}(r_i)}{2r_i^2} \geq \lim_{i\to+\infty} \frac{c^2 - c^2/2}{2r_i^2} = +\infty,$$

so dass $\limsup_{r\to 0} \tilde{U}_c(r) = +\infty$. $\square$

Aufgabe 5.9. *Es sei $\beta \in \mathbb{R}$ und $\tilde{U}_\beta, \tilde{U}_\beta^- : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ die Funktionen $\tilde{U}_\beta^+(r) = r^\beta$ und $\tilde{U}_\beta^-(r) = -r^\beta$. Bestimmen Sie hinreichende Bedingungen für β, so dass alle die maximalen Lösungen der entsprechenden Gleichung $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_\beta^+(\mathbf{r})$ (bzw. $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_\beta^-(\mathbf{r})$) für alle Zeiten definiert sind. Sind die von Ihnen bestimmten Bedingungen auch notwendig?*

6 Dynamik auf $\mathbb{R}^+$: unbeschränkte Bahnen 7.5.

Unser zweites und drittes Resultat beschreiben die Dynamik für Werte der Energie, die eine gewissene Regularitätsbedingung erfüllen. Wir brauchen erstmal einen Hilfsatz.

Hilfsatz 6.1. *Es sei $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ und $[\rho_0, \rho_1] \subset \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft*

$$U(r) < h, \qquad \forall\, r \in [\rho_0, \rho_1].$$

Es sei v_0 die einzige positive Zahl mit $E(\rho_0, v_0) = h$ und $r_{(\rho_0,v_0)} : I_{(\rho_0,v_0)} \to \mathbb{R}^+$ die entsprechende maximale Lösung. Dann gibt es $\tau > 0$ mit $r_{(\rho_0,v_0)}(\tau) = \rho_1$ und $\dot{r}_{(\rho_0,v_0)}(t) > 0$ für alle $t \in [0, \tau]$.

Beweis. Nach der Voraussetzung gibt es $\epsilon > 0$ mit

$$r_{(\rho_0,v_0)}(t) \in [\rho_0, \rho_1] \quad \Longrightarrow \quad \dot{r}_{(\rho_0,v_0)}(t) \geq \epsilon, \qquad \forall\, t \in I_{(\rho_0,v_0)} \tag{6.1}$$

Es sei nun $T := \sup I_{(\rho_0,v_0)}$. Wir nehmen per Widerspruch an, dass $r_{(\rho_0,v_0)}(t) < \rho_1$ für alle $t \in [0, T)$. Erstens sehen wir, dass $\dot{r}_{(\rho_0,v_0)}(t) > 0$ für alle $t \in [0, T)$. Wenn das nicht passiert, gibt es $t_1 \in [0, T)$ mit $\dot{r}_{(\rho_0,v_0)}(t_1) = 0$ und $\dot{r}_{(\rho_0,v_0)}(t_1) > 0$ für alle $t \in [0, t_1)$. Das impliziert die Bedingung $r_{(\rho_0,v_0)}(t_1) \geq \rho_0$, die die Implikation (6.1) widerspricht. Also $r_{(\rho_0,v_0)}$ ist monoton steigend auf $[0, T)$ und deswegen im kompakten Interval $[\rho_0, \rho_1]$ enthalten. Nach Satz 4.6 bekommen wir $T = +\infty$. Nach dem Fundamentalsatz der Integralrechnung schätzen wir

$$r_{(\rho_0,v_0)}(t) = \rho_0 + \int_0^t \dot{r}_{(\rho_0,v_0)}(s)\mathrm{d}s \geq \rho_0 + t\epsilon$$

ab und die rechte Seite ist größer als ρ_1 für t groß genug. □

Wir untersuchen jetzt die Dynamik auf den unbeschränkten Komponenten der Hillsregionen.

Satz 6.2. *Es seien $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ und $r_0 \in \mathbb{R}^+$ mit den Eigenschaften*

$$\bullet\ \ U(r) < h, \ \ \forall\, r > r_0, \qquad \bullet\ \ U(r_0) = h, \quad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r_0) < 0. \tag{6.2}$$

Es sei $r_{r_0} : I_{r_0} \to \mathbb{R}^+$ die maximale Lösung von $\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r)$ mit $(r_{r_0}(0), \dot{r}_{r_0}(0)) = (r_0, 0)$. Dann haben wir $I_{r_0} = (-T, T)$ für irgendwelche $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ und

- $r_{r_0}(t) = r_{r_0}(-t), \ \ \forall\, t \in (-T, T)$,
- $\dot{r}_{r_0}(t) > 0, \ \ \forall t \in (0, T)$,
- $\lim_{t \to T} r_{r_0}(t) = +\infty$.

Letztendlich gilt $\big\{(r_{r_0}(t), \dot{r}_{r_0}(t)) \;\big|\; t \in (-T, T)\big\} = \big([r_0, +\infty) \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h)$.

Beweis. Wir setzen $r' : -I_{r_0} \to \mathbb{R}^+$, $r'(t) = r_{r_0}(t)$, für alle $t \in -I_{r_0}$. Dann $r'(0) = r_{r_0}(0) = 0$ und $\dot{r}'(0) = -\dot{r}_{r_0}(-0) = 0$. Aus Satz 3.5 folgt es, dass $r_{r_0} = r'$ auf $I_{r_0} \cap (-I_{r_0})$. Die Maximalität von r_{r_0} impliziert, dass $I_{r_0} = -I_{r_0}$. Also $I_{r_0} = (-T, T)$ für irgendwelche $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Da $\ddot{r}_{r_0}(0) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r_0) > 0$ gilt, gibt es ein $t_0 > 0$ mit $\dot{r}_{r_0}(t) > 0$ für alle $t \in (0, t_0]$. Es sei nun eine Folge $r_k \to +\infty$. Wir wenden Hilfsatz 6.1 mit $\rho_0 = r_{(r_0)}(t_0)$ und $\rho_1 = r_k$ an und es sei $\tau = t_k > 0$ die Zahl, die wir daher bekommen. Als $r_k \to +\infty$ wir sehen, dass $t_k \to T$. Daher ist $\dot{r}_{r_0}(t) > 0$ für alle $t \in [t_0, T)$ und $\lim_{t \to T} r_{r_0}(t) = +\infty$.

Es bleibt die letzte Aussage zu beweisen. Wir sehen, dass $(r, v) \in ([r_0, +\infty) \times \mathbb{R}) \cap E^{-1}(h)$ genau dann, wenn $r \geq r_0$ und $v = \sqrt{2}\sqrt{h - U(r)}$ oder $v = -\sqrt{2}\sqrt{h - U(r)}$. Es sei $t \in [0, T)$ mit $r_{r_0}(t) = r$. Dann $v = \dot{r}_{r_0}(t)$, wenn $v \geq 0$ ist und $v = \dot{r}_{r_0}(-t)$, wenn $v \leq 0$ ist. □

Aufgabe 6.3. *Formulieren Sie einen Satz ähnlich wie Satz 6.2 für $U \to \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ und $r_0 \in \mathbb{R}^+$ unter den Voraussetzungen*

- $U(r) < h, \quad \forall\, r < r_0,$
- $U(r_0) = h, \quad \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r_0) > 0.$

Wir möchten nun die Dynamik beschreiben, wenn die komponente der Hillsregion ein Intervall ist. Zu diesem Zweck definieren wir erst genauer, was die Periode einer Kurve ist.

Definition 6.4. Es sei M eine Menge und $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to M$ eine Funktion. Eine Zahl $p \in \mathbb{R}$ heißt Periode von $\mathbf{x}$, wenn

$$\mathbf{x}(t + p) = \mathbf{x}(t), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren die Periodengruppe $\mathcal{P}(\mathbf{x})$, als die Menge aller Perioden von $\mathbf{x}$ und sagen, dass $\mathbf{x}$ periodisch ist, wenn $\mathcal{P}(\mathbf{x}) \neq \{0\}$. Es sei nun $\mathbf{x}$ periodisch. Wenn $\mathbf{x}$ stetig, nicht konstant und M ein hausdorffscher topologischer Raum ist, heißt das kleinste Element in $\mathcal{P}(\mathbf{x}) \cap \mathbb{R}^+$ die minimale Periode von $\mathbf{x}$.

Aufgabe*. *Es sei M eine Menge und $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to M$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass $\mathcal{P}(\mathbf{x})$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ ist und dass entweder $\mathcal{P}(\mathbf{x})$ dicht ist oder $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = P\mathbb{Z}$ für $P \geq 0$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass, wenn $\mathbf{x}$ periodisch ist, dann $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = P\mathbb{Z}$ mit $P > 0$ gilt, falls $\mathbf{x}$ stetig, nicht konstant und M ein hausdorffscher topologischer Raum ist.*

7 Dynamik auf $\mathbb{R}^+$: periodische Bahnen 14.5.

Satz 7.1. *Es sei $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ und $[r_0, r_1] \subset \mathbb{R}^+$ mit den Eigenschaften*

$$\bullet\ \ \forall\, r \in (r_0, r_1),\ U(r) < h, \quad \bullet\ \ U(r_0) = h = U(r_1), \quad \bullet\ \ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r_0) < 0,\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r_1) > 0. \tag{7.1}$$

Es sei $r_{r_0} : I_{r_0} \to \mathbb{R}^+$ die maximale Lösung von $\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r)$ mit $r_{r_0}(0) = r_0$ und $\dot{r}_{r_0}(0) = 0$. Dann $I_{r_0} = \mathbb{R}$ und es gibt eine positive Zeit T so, dass

$$r_{r_0}(T) = r_1, \qquad \dot{r}_{r_0}(t) > 0,\ \forall\, t \in (0, T).$$

Außerdem, für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$r_{r_0}(t) = r_{r_0}(t - 2kT), \qquad r_{r_0}(t) = r_{r_0}(-t + 2kT),$$

sodass die Funktion r_{r_0} von ihrer Einschränkung auf dem Intervall $[0, T]$ vollständig bestimmt ist. Insbesondere besitzt r_{r_0} minimale Periode $2T$. Letztendlich gilt

$$\big\{(r_{r_0}(t), \dot{r}_{r_0}(t)) \ \big|\ t \in \mathbb{R}\big\} = \big([r_0, r_1] \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h). \tag{7.2}$$

Beweis. Die Bahn r_{r_0} besitzt Energie $E(r_{r_0}, \dot{r}_{r_0}) = E(r_0, 0) = h$. Nach Satz 4.4 liegt r_{r_0} in der kompakten Menge $[r_0, r_1]$ und daher gilt $I_{r_0} = \mathbb{R}$. Die Funktion $\dot{r}_{r_0}$ ist monoton steigend um $t = 0$, weil $\ddot{r}_{r_0}(0) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r_{r_0}(0)) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r_0) > 0$. Deshalb gibt es $t_0 > 0$ mit $\dot{r}_{r_0}(t)$ für alle $(0, t_0] \subset P$ und wir setzen $r_2 := r_{r_0}(\delta_0)$. Es sei nun für $k \geq 3$ eine monoton steigende Folge $r_k \in (r_2, r_1)$ mit $r_k \to r_1$. Wir wenden Hilfsatz 6.1 mit $\rho_0 = r_2$ und $\rho_1 = r_k$ an, und bekommen eine entsprechende monoton steigende Folge von Zeiten $\tau = t_k$. Wir definieren $T = \lim_{k\to+\infty} t_k$. Wir wissen, dass $\dot{r}_{r_0}(t) > 0$ für $t \in (0, T)$ und deshalb

$$\lim_{t\to T} r_{r_0}(t) = r_1.$$

Wir nehmen per Widerspruch an, dass $T = +\infty$. Es existieren $s_1 < r_1$ und $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r) \geq \epsilon$ für alle $r \in [s_1, r_1]$. Es sei $\delta > 0$ die einzige Zeit mit $r_{r_0}(\delta) = s_1$. Dann, $\ddot{r}_{r_0}(t) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(t) \leq -\epsilon$, für alle $t \in [\delta$. Wir schätzen ab:

$$\dot{r}_{r_0}(t) = \dot{r}_{r_0}(\delta) + \int_\delta^t \ddot{r}_{r_0}(\tau)\mathrm{d}\tau \leq \dot{r}_{r_0}(\delta) - (t - \delta)\epsilon,$$

sodass $\dot{r}_{r_0}(t) \leq 0$ für t groß genug. Dieser Widerspruch gibt $T < +\infty$ und somit $r_{r_0}(T) = r_1$

Es seien nun $r'(t) := r_{r_0}(-t)$ und $r''(t) := r_{r_0}(2T - t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass $r_{r_0} = r'$ und $r = r''$. Die Funktionen r' und r'' sind beide Lösungen von $\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$. Nach Satz 3.5 genügt es zu merken, dass

$$\begin{aligned} r_{r_0}(0) &= r_{r_0}(-0) = r'(0), & \dot{r}_{r_0}(0) &= 0 = -\dot{r}_{r_0}(-0) = \dot{r}'(0), \\ r_{r_0}(T) &= r_{r_0}(2T - T) = r''(T), & \dot{r}_{r_0}(T) &= 0 = -\dot{r}_{r_0}(2T - T) = \dot{r}''(T). \end{aligned}$$

Wir verketten die zwei Identitäten und finden für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} r_{r_0}(t) &= r_{r_0}(-t) = r_{r_0}(2T-(-t)) = r_{r_0}(2T+t), \\ r_{r_0}(t) &= r_{r_0}(2T-t) = r_{r_0}(-(2T-t)) = r_{r_0}(t-2T). \end{aligned}$$

Aus einer Iteration dieser zwei Gleichungen finden wir $r_{r_0}(t) = r_{r_0}(t-kT)$ und schließlich $r_{r_0}(t) = r_{r_0}(t-kT) = r_{r_0}(kT-t)$ für alle k gerade. Es bleibt nur die letzte Aussage zu beweisen. Wir sehen, dass $(r,v) \in ([r_0,r_1]\times\mathbb{R}) \cap E^{-1}(h)$ genau dann, wenn $r \in [r_0,r_1]$ und $v = \sqrt{2}\sqrt{h-U(r)}$ oder $v = -\sqrt{2}\sqrt{h-U(r)}$. Es sei $t \in [0,T]$ mit $r_{r_0}(t) = r$. Dann $v = \dot{r}_{r_0}(t)$, wenn $v \geq 0$ ist und $v = \dot{r}_{r_0}(-t)$, wenn $v \leq 0$ ist. □

Aufgabe*. *Beweisen Sie, dass unter den Voraussetzungen von Satz 7.1, die Menge*

$$([r_0,r_1]\times\mathbb{R}) \times E^{-1}(h)$$

eine glatte geschlossene Kurve ist, indem Sie zeigen, dass $\operatorname{grad} E(r,v) \neq \mathbf{0}$ *für alle* (r,v)*, die zu dieser Menge gehören.*

Aufgabe*. *Es sei* $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, $r_0, r_1, v_0 \in \mathbb{R}^+$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

$$r_0 < r_1, \quad E(r_0,v_0) = h = E(r_1,0), \quad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r_1) = 0, \quad U(r) < h,\ \forall\, r \in [r_0,r_1).$$

Wenn $r_{r_0,v_0} : I_{(r_0,v_0)} \to \mathbb{R}^+$ *die maximale Lösung mit Anfang* (r_0,v_0) *ist, gilt*

$$\sup I_{(r_0,v_0)} = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} r_{(r_0,v_0)}(t) = r_1.$$

7.1 Anwendung zum Zentralkraftproblem

Folgerung 7.2. *Es sei* $\mathbf{F}$ *eine Zentralkraft mit Potential* $\tilde{U}$. *Es seien weiter* $c > 0$ *und* $\tilde{U}_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *das dazugehörende effektive Potential. Wir nehmen* $h \in \mathbb{R}$ *und* $[r_0,r_1] \subset \mathbb{R}^+$ *so, dass die Bedingungen in (7.1) von* $\tilde{U}_c$ *erfüllt sind. Es sei* $(r_{r_0}, \theta_{(r_0,\theta_0)}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ *eine Lösung von (5.1) mit Energie* $h \in \mathbb{R}$ *und* $r_{r_0}(0) = r_0$, $\theta_{(r_0,\theta_0)}(0) = \theta_0$. *Wir definieren*

$$\Theta := \frac{c}{\sqrt{2}} \int_{r_0}^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{h-\tilde{U}_c(r)}} > 0.$$

Dann für alle $k \in \mathbb{Z}$ *und* $t \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\theta_{(r_0,\theta_0)}(t) = 2k\Theta + \theta_{(r_0,\theta_0)}(t-2kT), \qquad \theta_{(r_0,\theta_0)}(t) = 2\theta_0 + 2k\Theta - \theta_{(r_0,\theta_0)}(-t+2kT).$$

Es folgert daraus, dass die Funktion $\theta_{(r_0,\theta_0)}$ *von ihrer Einschränkung auf dem Intervall* $[0,T]$ *vollständig bestimmt ist und dass*

- $\theta_{(r_0,\theta_0)}(kT) = \theta_0 + k\Theta, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},$
- $\lim_{t\to\pm\infty} \theta_{(r_0,\theta_0)}(t) = \pm\infty.$

Es sei nun $\mathbf{r}_{(r_0,\theta_0)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2_\times$ *die Lösung von* $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, *die Polarkoordinaten* $(r_{r_0}, \theta_{(r_0,\theta_0)})$ *besitzt. Dann* $\mathbf{r}_{(r_0,v_0)}$ *ist periodisch genau dann, wenn es miteinander teilfremde natürliche Zahlen* $a, b \in \mathbb{N}$ *mit* $\Theta/\pi = a/b$ *existieren. In diesem Fall ist die Periode* $2bT$.

Letztendlich gleicht $\big\{\big(\mathbf{r}_{(r_0,v_0)}(t), \dot{\mathbf{r}}_{(r_0,v_0)}(t)\big) \;\big|\; t \in \mathbb{R},\ \theta_0 \in \mathbb{R}\big\}$ *die Menge*

$$\big\{(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2_\times \times \mathbb{R}^2 \;\big|\; r_0 \le r \le r_1,\ E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = h,\ \langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{v}\rangle = c\big\}.$$

Beweis. Aus der zweiten Gleichung in (5.1) und dem vorherigen Satz wissen wir, dass

$$\dot\theta_{(r_0,\theta_0)}(t) = \dot\theta_{(r_0,\theta_0)}(t - 2kT), \quad \dot\theta_{(r_0,\theta_0)}(t) = \dot\theta_{(r_0,\theta_0)}(-t + 2kT), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Wir integrieren diese Gleichungen auf $[0, t]$ und finden

$$\begin{aligned} \theta_{(r_0,\theta_0)}(t) &= \theta_0 + \theta_{(r_0,\theta_0)}(t - 2kT) - \theta_{(r_0,\theta_0)}(-2kT), \\ \theta_{(r_0,\theta_0)}(t) &= \theta_0 - \theta_{(r_0,\theta_0)}(-t + 2kT) + \theta_{(r_0,\theta_0)}(2kT). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Für $t = T$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \theta_{(r_0,\theta_0)}(T) - \theta_0 &= \theta_{(r_0,\theta_0)}((-2k + 1)T) - \theta_{(r_0,\theta_0)}(-2kT), \\ \theta_{(r_0,\theta_0)}(T) - \theta_0 &= \theta_{(r_0,\theta_0)}(2kT) - \theta_{(r_0,\theta_0)}((2k - 1)T). \end{aligned}$$

Da $k \in \mathbb{Z}$ beliebig ist, folgt $\theta_{(r_0,v_0)}(kT) = \theta_0 + k(\theta_{(r_0,v_0)}(T) - \theta_0)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Wir können also (7.3) so umschreiben:

$$\begin{aligned} \theta_{(r_0,\theta_0)}(t) &= 2k(\theta_{(r_0,\theta_0)}(T) - \theta_0) + \theta_{(r_0,\theta_0)}(t - 2kT), \\ \theta_{(r_0,\theta_0)}(t) &= 2\theta_0 + 2k(\theta_{(r_0,\theta_0)}(T) - \theta_0) - \theta_{(r_0,\theta_0)}(-t + 2kT). \end{aligned}$$

Es bleibt nun zu sehen, dass $\Theta = \theta_{(r_0,\theta_0)}(T) - \theta_0$. Die Einschränkung von r_{r_0} auf $[0, T]$ hat eine Umkehrfunktion $t : [r_0, r_1] \to [0, T]$. Wir rechnen

$$\frac{\mathrm{d}(\theta_{(r_0,\theta_0)} \circ t)}{\mathrm{d}r} = \frac{\dot\theta_{(r_0,\theta_0)}}{\dot r_{(r_0)}} = \frac{c}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{h - \tilde U_c(r)}}.$$

Eine Integrierung der obigen Gleichung auf $[r_0, r_1]$ liefert die gewünschte Formel. Da r_{r_0} minimale Periode $2T$ besitzt, hat $\mathbf{r}_{(r_0,v_0)}$ Periode $p \in \mathbb{R}^+$ genau dann, wenn es teilfremde natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit $p = 2bT$ und $\theta_{(r_0,v_0)}(t + 2bT) - \theta_{(r_0,v_0)}(t) = 2\pi a$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gibt. Da $\theta_{(r_0,v_0)}(t + 2bT) - \theta_{(r_0,v_0)}(t) = 2b\Theta$ gilt, ist die obige Bedingung gleichbedeutend mit $\Theta = \frac{a}{b}\pi$.

Letztendlich sei es $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2_\times \times \mathbb{R}^2$ mit $r_0 \le r \le r_1$, $E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = h$ und $\langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{v}\rangle = c$. Wir nehmen $\theta \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathbf{r} = re^{\mathbf{i}\theta}$, und erinnern uns daran, dass $\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{r}}\rangle\hat{\mathbf{r}} + \frac{c}{r}\,\mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ und $E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \tilde E_c(r, \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{r}}\rangle)$. Nach (7.2) gibt es $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\theta_0 \in \mathbb{R}$ mit $r_{r_0}(t_0) = r$, $\dot r_{r_0}(t_0) = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{r}}\rangle$ und $\theta_{(r_0,\theta_0)}(t_0) = \theta$. Nach Satz 4.10.(ii,iv) haben wir $\mathbf{r}_{(r_0,\theta_0)}(t_0) = \mathbf{r}$ und $\dot{\mathbf{r}}_{(r_0,\theta_0)}(t_0) = \mathbf{v}$. □

Satz 7.3 (Bertrand 1873)**.** *Es sei* $\mathbf{F}$ *eine konservative Zentralkraft. Wenn alle die beschränkten Bahnen mit* $\mathbf{c} \neq 0$ *periodisch sind, besitzt das Potential entweder die Gestalt*

$$\tilde U(r) = \mu r^2 \qquad \textit{oder} \qquad \tilde U(r) = -\frac{\mu}{r}, \qquad \mu > 0. \qquad \square$$

8 Kegelschnitte 17.5.

In disem Kapitel definieren wir die Kegelschnitte, also die Parabel, die Ellipse und die Hyperbel.

Es sei $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene. Es seien eine Gerade $\ell \subset \alpha$ und einen Punkt $\mathbf{B} \in \alpha \setminus \ell$, gegeben. Die Parabel $\mathcal{P}$ mit Brennpunkt $\mathbf{B}$ und Leitlinie ℓ ist die Menge der Punkte $\mathbf{r} \in \alpha$, für die

$$|\mathbf{r} - \mathbf{B}| = \text{Abstand}(\mathbf{r}, \ell), \tag{8.1}$$

gilt, wobei Abstand$(\mathbf{r}, \ell)$ die Länge des Lotes auf ℓ durch $\mathbf{r}$ ist. Wir bemerken, dass $\mathcal{P}$ in der zusammenhängenden Komponente von $\alpha \setminus \ell$ enthalten ist, die auch $\mathbf{B}$ enthält. Wenn $\mathbf{r}$ zur anderen Komponente gehören würde, würde die Strecke zwischen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{r}$ die Gerade ℓ schneiden und $\mathbf{r}$ kann nicht (8.1) erfüllen.

Der Punkt $\mathbf{P}$ auf der Parabel mit minimalen Abstand von $\mathbf{B}$ heißt Periapsis. Wir setzen $d := \text{Abstand}(\mathbf{B}, \ell) = 2|\mathbf{P} - \mathbf{B}|$ und $\mathbf{e} \in \alpha \cap S^2$ für den Normalenvektor von ℓ, die in die Halbebene, die $\mathcal{P}$ nicht enthält, gerichtet ist. Also $\ell := \{\mathbf{r} \in \alpha \mid \langle \mathbf{r} - d\mathbf{e}, \mathbf{e}\rangle = 0\}$ und $\mathcal{P} \subset \{\mathbf{r} \in \alpha \mid \langle \mathbf{r} - d\mathbf{e}, \mathbf{e}\rangle < 0\}$.

Es seien zwei Punkte $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \alpha$ und eine positive Zahl a mit $|\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2| \neq 2a$. Wir definieren $c := \frac{1}{2}|\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1|$ und $e := \frac{c}{a} \geq 0$. Falls $|\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2| < 2a$ ist die Ellipse $\mathcal{E}$ mit Brennpunkten $\mathbf{B}_1$ und $\mathbf{B}_2$ und großer Halbachse a die Menge der Punkte $\mathbf{r} \in \alpha$, für die die folgende Gleichung gilt:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{B}_1| + |\mathbf{r} - \mathbf{B}_2| = 2a. \tag{8.2}$$

Der Punkt $\mathbf{M} := \frac{1}{2}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)$ heißt Mittelpunkt der Ellipse. Wir setzen $\mathbf{A} := \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$. Der Punkt $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ mit kleinstem Abstand von $\mathbf{B}_2$ heißt Periapsis (bezüglich $\mathbf{B}_2$). Es gilt $|\mathbf{P} - \mathbf{B}_2| = (1 - e)a = a - c$, $|\mathbf{P} - \mathbf{M}| = a$, $|\mathbf{B}_2 - \mathbf{M}| = c$.

Falls $|\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1| > 2a$ ist der $\mathbf{B}_2$ nähere Ast $\mathcal{H}$ der Hyperbel mit Brennpunkten $\mathbf{B}_1$ und $\mathbf{B}_2$ und reeller Halbachse a die Menge der Punkte $\mathbf{r} \in \alpha$, für die die folgende Gleichung gilt:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{B}_2| - |\mathbf{r} - \mathbf{B}_1| = 2a. \tag{8.3}$$

Der Punkt $\mathbf{M} := \frac{1}{2}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)$ heißt Mittelpunkt der Hyperbel. Wir setzen $\mathbf{A} := \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1$. Der Punkt $\mathbf{P} \in \mathcal{H}$ mit kleinstem Abstand von $\mathbf{B}_1$ heißt Periapsis (bezüglich $\mathbf{B}_1$). Es gilt $|\mathbf{P} - \mathbf{B}_1| = (e - 1)a = c - a$, $|\mathbf{P} - \mathbf{M}| = a$, $|\mathbf{B}_1 - \mathbf{M}| = c$. Die Asymptote der Hyperbel sind die zwei Geraden auf α, die durch $\mathbf{M}$ laufen und ein Winkel θ mit $\mathbf{A}$ bilden, wobei $\cos\theta = -\frac{1}{e}$.

Wir schreiben nun die Gleichung von einem Kegelschnitt in $\mathbb{R}^3$ mit Brennpunkt in $\mathbf{0}$.

Satz 8.1. *Es sei α eine Ebene mit $\mathbf{0} \in \alpha$, $\mathbf{e}$ ein Punkt in α und $d \in \mathbb{R}^+$. Die Menge*

$$K(\mathbf{e}, d) := \left\{ \mathbf{r} \in \alpha \;\middle|\; r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r}\rangle = d \right\} \tag{8.4}$$

definiert einen Kegelschnitt mit Brennpunkt in $\mathbf{0}$. *Wenn* $e \neq 0$, *gilt*

$$K(\mathbf{e}, d) = \Big\{\mathbf{r} \in \alpha \;\Big|\; r = e \cdot \mathrm{Abstand}(\mathbf{r}, \ell),\ \langle \mathbf{r} - \tfrac{d}{e}\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{e}}\rangle < 0\Big\}, \quad \ell := \Big\{\mathbf{r} \in \alpha \;\Big|\; \langle \mathbf{r} - \tfrac{d}{e}\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{e}}\rangle = 0\Big\}.$$

Wir nennen ℓ *die Leitlinie von* $K(\mathbf{e}, d)$. *Außerdem:*

- *für* $e = 1$ *ist* $K(\mathbf{e}, d)$ *eine Parabel mit Leitlinie* ℓ *und Brennpunkt* $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.
- *für* $e \neq 1$ *ist* $K(\mathbf{e}, d)$ *eine Ellipse mit* $\mathbf{A} := \mathbf{B}_1$ *und* $\mathbf{0} = \mathbf{B}_2$, *falls* $e < 1$, *und der zu* $\mathbf{0}$ *nähere Ast einer Hyperbel mit* $\mathbf{0} = \mathbf{B}_1$ *und* $\mathbf{A} = \mathbf{B}_2$, *falls* $e > 1$. *Es gibt eine Bijektion zwischen* $(\mathbf{e}, d)$ *und* $(\mathbf{A}, a)$, *wobei* $a \neq A/2$ *die große (bzw. reelle) Halbachse des Kegelschnittes ist:*

$$\begin{cases} a = \dfrac{d}{|1 - e^2|}, \\ \mathbf{A} = -\dfrac{2d}{1 - e^2}\mathbf{e}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} d = a\Big|1 - \dfrac{A^2}{4a^2}\Big|, \\ \mathbf{e} = \begin{cases} -\dfrac{\mathbf{A}}{2a}, & \textit{falls} \ \ e < 1, \\ +\dfrac{\mathbf{A}}{2a}, & \textit{falls} \ \ e > 1, \end{cases} \end{cases} \tag{8.5}$$

Es gilt zusätzlich eine Bijektion

$$\{(\mathbf{e}, a) \in \alpha \times \mathbb{R}^+ \mid e \neq 1\} \to \{(\mathbf{e}, d) \in \alpha \times \mathbb{R}^+ \mid e \neq 1\}, \quad (\mathbf{e}, a) \mapsto (\mathbf{e}, a|1 - e^2|). \tag{8.6}$$

Wenn $e \neq 0$ *und* $f \in \mathbb{R}$ *der Winkel zwischen der Halbegerade* $\mathbb{R}^+\mathbf{e}$ *und* $\mathbf{r}$ *ist, lässt sich* $K(\mathbf{e}, d)$ *in den entsprechenden Polarkoordinaten auf* $\alpha \setminus \{\mathbf{0}\}$ *als*

$$K(\mathbf{e}, d) = \Big\{(r, f) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \;\Big|\; r = \frac{d}{1 + e\cos f}\Big\} \tag{8.7}$$

schreiben. Falls $e \geq 1$ *gehört der Winkel* f *zum Intervall* $\big(-\arccos(-e^{-1}), \arccos(-e^{-1})\big)$ *bis auf Vielfachen von* 2π.

Beweis. Die Aussage ist unmittelbar für $e = 1$, weil die Gleichung (8.1) zum

$$r = -\langle \mathbf{r} - d\mathbf{e}, \mathbf{e}\rangle = -\langle \mathbf{e}, \mathbf{r}\rangle + d,$$

wird, wie gewünscht. Es seien nun $\mathbf{A} \in \alpha$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Wenn $A < 2a$ gilt, lautet die Gleichung (8.2) für eine Ellipse mit Brennpunkten $\mathbf{0}$ und $\mathbf{A}$ und großer Halbachse a

$$|\mathbf{r} - \mathbf{A}| = 2a - r. \tag{8.8}$$

Wir bemerken, dass $|\mathbf{r} - \mathbf{A}| > r - A > r - 2a$. Daher quadrieren wir (8.8) und bekommen die äquivalenten Gleichungen

$$|\mathbf{r} - \mathbf{A}|^2 = (2a - r)^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 2\langle \mathbf{r}, \mathbf{A}\rangle + A^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 \;\Leftrightarrow\; 4ar + \langle -2\mathbf{A}, \mathbf{r}\rangle = 4a^2 - A^2.$$

Wir teilen die letzte Gleichung durch $4a$ und bekommen die Formel in (8.4) mit Hilfe der Substitution (8.5). Wenn $A > 2a$ gilt, lautet die Gleichung (8.2) mit $\mathbf{B}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}$ und reeller Halbachse a

$$|\mathbf{r} - \mathbf{A}| = 2a + r. \tag{8.9}$$

Da beide Seiten positiv sind, quadrieren wir (8.9) und bekommen die äquivalenten Gleichungen

$$|\mathbf{r} - \mathbf{A}|^2 = (2a + r)^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 2\langle \mathbf{r}, \mathbf{A} \rangle + A^2 = 4a^2 + 4ar + r^2 \;\Leftrightarrow\; 4ar + \langle 2\mathbf{A}, \mathbf{r} \rangle = A^2 - 4a^2.$$

Wir teilen die letzte Gleichung durch $4a$ und bekommen die Formel in (8.4) mit Hilfe der Substitution (8.5).

Wenn $\mathbf{r}$ in α enthalten ist, haben wir $d - \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle = e\big(\frac{d}{e} - \langle \mathbf{r}, \hat{\mathbf{e}} \rangle\big) = -e\langle \mathbf{r} - \frac{d}{e}\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{e}} \rangle$. Das heißt, dass $K(\mathbf{e}, d)$ in der Halbebene enthalten ist, wo $\langle \mathbf{r} - \frac{d}{e}\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{e}} \rangle$ negativ ist. Aber für $\mathbf{r}$ in dieser Halbebene ist $r = d - \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle$ äquivalent zu $r = e \cdot \text{Abstand}(\mathbf{r}, \ell)$, weil $-\langle \mathbf{r} - \frac{d}{e}\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{e}} \rangle = \text{Abstand}(\mathbf{r}, \ell)$. $\square$

9 Das keplersche Problem 23.5

9.1 Das erste keplersche Gesetz

Es sei $\mu > 0$ und betrachte man eine Lösung des keplerschen Problems

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \tag{9.1}$$

mit Drehimpuls $\mathbf{c}$ und Energie h. Die Energie lautet

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r},$$

so, dass h eine beliebige reelle Zahl sein darf. Aus Satz 4.10 haben wir zusätzlich für $c > 0$

$$h \geq \min_{r \in \mathbb{R}^+} \left(\frac{c^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} \right) = \tilde{U}_c \left(\frac{c^2}{\mu} \right) = -\frac{\mu^2}{2c^2} \tag{9.2}$$

und die Gleicheit gilt genau dann, wenn $\mathbf{r}$ eine Kreisbahn ist.

Satz 4.10 liefert auch mit Hilfe von (9.1)

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{c}}{\mu} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathbf{c}}{\mu} \times \mathbf{r} \Big).$$

Also, gibt es $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$, den sogenannten Exzentrizitätsvektor, mit

$$\hat{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{c}}{\mu} \times \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{e}. \tag{9.3}$$

Wenn $\mathbf{c} = 0$, dann $\hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{e}$. Also, $e = 1$ und die Bewegung erfolgt auf der Halbachse $-\mathbb{R}^+\mathbf{e}$. Wenn $\mathbf{c} \neq 0$ ist die Bewegungsebene $\alpha_{\mathbf{r}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle = 0\}$ wohl definiert. Aus der obigen Gleichung folgt es, dass $\langle \mathbf{e}, \mathbf{c} \rangle = 0$ so, dass sich $\mathbf{e}$ auf $\alpha_{\mathbf{r}}$ befindet. Wir kennzeichnen mit $\mathbf{i} : \alpha_{\mathbf{r}} \to \alpha_{\mathbf{r}}$ die Drehung um neunzig Graden, wie in der Formel (2.2). Die Gleichung (9.3) lässt sich als

$$\hat{\mathbf{r}} + \frac{c}{\mu}\mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{e} \tag{9.4}$$

schreiben. Diese Vektorgleichung (9.4) ist äquivalent zu den folgenden zwei Skalargleichungen. In der ersten nehmen wir das Skalarprodukt beider Seiten mit $\mathbf{r}$:

$$\langle \hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle + \frac{c}{\mu}\langle \mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle = -\langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad r - \frac{c^2}{\mu} = -\langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle,$$

wobei $\langle \mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle = -c$ wegen der Formel (4.2) und der Antisymmetrie von $\mathbf{i}$. Wir bekommen

$$r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle = d, \qquad d := \frac{c^2}{\mu}. \tag{9.5}$$

Das heißt, dass für $\mathbf{c} \neq 0$ die Kurve $\mathbf{r}$ dem Kegelschnitt $K(\mathbf{e}, d)$ gehört.

Satz 9.1 (Erstes keplersche Gesetz). *Es sei* $\mathbf{r}$ *eine Lösung des keplerschen Problems* (9.1) *mit nicht verschwindendem Drehimpuls. Dann* $\mathbf{r}$ *läuft auf einem Kegelschnitt mit einem Brennpunkt in* $\mathbf{0}$. $\square$

Die zweite Skalargleichung bekommen wir, indem wir die Norm von (9.4) nehmen:

$$|\hat{\mathbf{r}} + \frac{c}{\mu}\mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{r}}|^2 = e^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{c^2}{\mu^2}v^2 + 2\frac{c}{\mu r}\langle \mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}\rangle = e^2.$$

Da $\langle \mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}\rangle = -c$ leiten wir die Identität

$$2hc^2 = \mu^2(e^2 - 1). \tag{9.6}$$

her. Welche Art von Kegelschnitt hängt also aus dem Vorzeichen der Energie ab:

$$\left\{\begin{matrix} h < 0 & \Leftrightarrow & e < 1, \\ h = 0 & \Leftrightarrow & e = 1, \\ h > 0 & \Leftrightarrow & e > 1. \end{matrix}\right\} \tag{9.7}$$

Es seien nun die Mengen

$$M := \big\{(c, h) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; c > 0, \;\; 2c^2h \geq -\mu^2\big\}, \qquad N = \big\{(e, d) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; e \geq 0, \;\; d > 0\big\}$$

definiert. Es besteht eine Bijektion $M \to N$, die durch (9.5) und (9.6) gegeben ist:

$$\begin{cases} d = \dfrac{c^2}{\mu}, \\ e = \sqrt{1 + \dfrac{2hc^2}{\mu^2}}, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \;\; c = \sqrt{\mu d}, \\ |h| = \mu\dfrac{e^2 - 1}{2d}, \end{cases} \tag{9.8}$$

sodass die Menge $\mathbb{R}^+ \times 0 \subset M$ auf die Menge $1 \times \mathbb{R}^+ \subset N$ abgebildet wird. Die Menge $N \setminus (1 \times \mathbb{R}^+)$ und $N' = \big\{(e, a) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; e \geq 0, \;\; e \neq 1, \;\; a > 0\big\}$ sind auch in Bijektion nach (8.6). Die Verkettungsbijektion liefert die folgende Bijektion $M \setminus (\mathbb{R}^+ \times 0) \to N'$

$$\begin{cases} a = \dfrac{\mu}{2|h|}, \\ e = \sqrt{1 + \dfrac{2hc^2}{\mu^2}}, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \;\; c = \sqrt{\mu a|1 - e^2|}, \\ |h| = \dfrac{\mu}{2a}. \end{cases} \tag{9.9}$$

10 Die Dynamik des keplerschen Problems 24.5.

Satz 10.1. *Es sei* $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3_\times$ *eine maximale Lösung von* (9.1) *mit* $\mathbf{r}(t) = -r(t)\mathbf{e}$. *Es sei angenommen, dass* $h \geq 0$. *Wenn* $\dot{r}(0) > 0$, *dann* r *ist monoton steigend, und*

$$I = (-t_0, +\infty), \qquad \lim_{t \to -t_0} r(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} r(t) = \infty.$$

Wenn $\dot{r}(0) < 0$, *dann* r *ist monoton fallend und*

$$I = (-\infty, t_0), \qquad \lim_{t \to t_0} r(t) = 0, \qquad \lim_{t \to -\infty} r(t) = \infty$$

Es sei angenommen, dass $h < 0$. *Dann* $2a := \max r(t) = -\mu/h$. *Wenn* $r(0) = 2a$, *dann* $I = (-p/2, p/2)$, *wobei*

$$p^2 := \frac{4\pi^2}{\mu} a^3, \qquad \lim_{t \to \pm p/2} r(t) = 0.$$

Beweis. Alle die Aussage folgen aus dem Hilfsatz 6.1 und der Tatsache, dass $U(r) = -\mu/r$. Wir müssen nur p für $h < 0$ berechnen. Also

$$\begin{aligned}
\frac{p}{2} = \int_{-\frac{p}{2}}^{0} \mathrm{d}t = \int_0^{2a} \frac{1}{\dot{r}} \mathrm{d}r = \int_0^{2a} \frac{1}{\sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}}} \mathrm{d}r &= \frac{\sqrt{2a}\, 2a}{\sqrt{2\mu}} \int_0^1 \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{1-s}} \mathrm{d}s \\
&= 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\cos u} 2 \sin u \cos u \mathrm{d}u \\
&= 4\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \mathrm{d}u \\
&= 4\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

□

Folgerung 10.2. *Es seien* $h \in \mathbb{R}$ *und* $\mathbf{e} \in S^2$. *Bis auf Zeitverschiebung gibt es genau eine Lösung des keplerschen Problems mit verschwindendem Drehimpuls, Energie* h *und Exzentrizitätsvektor* $\mathbf{e}$.

Beweis. Wir nehmen eine Lösung mit Anfangsbedingungen $\mathbf{r}_0 = -r_0\mathbf{e}$ und $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}$, so dass r_0 und v_0 der Gleichung

$$h = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r_0}$$

genügen. Die Eindeutigkeit bis auf Zeitverschiebung folgt aus Satz 10.1. □

Satz 10.3. *Die maximale Lösungen von* (9.1) *mit* $c > 0$ *sind für alle reelle Zeiten definiert. Der ganze Kegelschnitt ist in einem Sinn gelaufen und, falls der Kegelschnitt eine Ellipse ist, die Bewegung besitzt eine gewissene minimale Periode* $p > 0$. *Die ist die Umlaufzeit, d. h. die Zeit, in der die Bahn eine vollständige Umrundung zum* $\mathbf{0}$ *vollführt. In einer Formel,* $\theta(p) = \theta(0)2\pi$, *wobei* θ *die Winkelkoordinate der Bahn ist.*

Beweis. Das Potential $\tilde{U}(r) = -\mu/r$ genügt den Bedingungen $(i)'$ und $(ii)'$ in der Folgerung 5.8. Daher ist das Existenzintervall für Bahnen mit $\mathbf{c} \neq 0$ das ganze $\mathbb{R}$. Es seien nun (r, θ) die Polarkoordinaten der Bahn und $\mathbf{c} = (0, 0, c)$ mit $c > 0$. Da $\cdot\theta = c/r^2$, folgt es, dass die Bahn läuft in einem festen Sinn. Es sei nun angenommen, dass die Bahn auf einer Parabel oder einer Hyperbel läuft. In diesem Fall ist $h \geq 0$ und $\tilde{U}_c^{\leq h} = [r_0, +\infty)$, wobei $\frac{\mathrm{d}\tilde{U}_c}{\mathrm{d}r}(r_0) < 0$, denn $\tilde{U}_c$ besitzt nur ein negatives Minimum als kritischen Punkt. Dann divergiert die radiale Koordinate der Bahn für $t \to \pm\infty$ nach Satz (6.2) und deswegen wird die ganze Parabel oder Hyperbel begangen. Wenn sich die Bahn auf einer Ellipse befindet, ist die radiale Koordinate nach oben beschränkt und somit die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ nach unten von einer positiven Zahl beschränkt. Das heißt, dass es $p \in \mathbb{R}^+$ gibt mit $\theta(p) = \theta(0) + 2\pi$. Aus (8.7) folgt es, dass $r(p) = r(0)$ gilt. Daher bekommen wir auch $\dot{\theta}(p) = \dot{\theta}(0)$. Wir leiten nun (8.7) nach t ab:

$$\dot{r} = -\frac{de \sin\theta}{(1 - e\cos\theta)^2}\dot{\theta}.$$

Deswegen gilt auch $\dot{r}(p) = \dot{r}(0)$. Nach Satz 3.5 gewinnen wir die Gleichung $\mathbf{r}(t+p) = \mathbf{r}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Zahl p ist die minimale Periode, weil $\dot{\theta}$ positiv ist. □

Folgerung 10.4. *Es seien* $\mathbf{c}$ *und* $\mathbf{e}$ *zwei Vektoren des* $\mathbb{R}^3$, *sodass* $\mathbf{c} \neq 0$ *und* $\langle \mathbf{e}, \mathbf{c} \rangle = 0$. *Bis auf Zeitverschiebung gibt es genau eine Lösung des keplerschen Problems, die Drehimpuls* $\mathbf{c}$ *und Exzentrizitätsvektor* $\mathbf{e}$ *besitzt. Äquivalent: für alle orientierten Kegelschnitte* $\mathcal{K}$ *mit Brennpunkt in* $\mathbf{0}$ *gibt es genau eine Lösung des keplerschen Problems bis auf Zeitverschiebung, das* $\mathcal{K}$ *parametrisiert.*

Beweis. Wir nehmen $\mathbf{e}_1 \in S^2$ mit $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{c} \rangle = 0$, wobei $\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{e}}$, wenn $\mathbf{e} \neq 0$. Wir haben $\mathbf{e} = e\mathbf{e}_1$. Wir bemerken, dass $\hat{\mathbf{c}}$, $\mathbf{e}_1$ und $\hat{\mathbf{c}} \times \mathbf{e}_1$ eine positive orthonormale Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Wir nehmen eine Lösung mit Anfangsbedingungen $\mathbf{r}_0 = r_0\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{v}_0 = v_0\hat{\mathbf{c}} \times \mathbf{e}_1$, so dass

$$r_0 = \frac{c^2}{\mu(1+e)}, \qquad v_0 = \frac{\mu}{c}(1+e).$$

Es folgt daraus, dass $c = r_0 v_0$ und $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 = (r_0 v_0)\mathbf{e}_1 \times (\hat{\mathbf{c}} \times \mathbf{e}_1) = c\,\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$. Außerdem,

$$\hat{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{\mu}\mathbf{c} \times \mathbf{v}_0 = \mathbf{e}_1 + \frac{cv_0}{\mu}\hat{\mathbf{c}} \times (\hat{\mathbf{c}} \times \mathbf{e}_1) = \Big(1 - \frac{cv_0}{\mu}\Big)\mathbf{e}_1 = -e\,\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}.$$

Die Eindeutigkeit bis auf Zeitverschiebung folgt, wenn wir das Argument für die Existenz der Periode im Satz 10.3 entsprechend anpassen. □

Folgerung 10.5 (Drittes keplersche Gesetz)**.** *Für elliptische Lösungen des keplerschen Problems sind die minimale Periode* p *und die große Halbachse* a *durch die folgende Gleichung verbunden*

$$\frac{p^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}. \tag{10.1}$$

Beweis. Die kleine Halbachse der Ellipse ist gleich $\sqrt{1-e^2}a$. Deswegen der Flächeninhalt der Ellipse beträgt $\pi\sqrt{1-e^2}a^2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $\dot\theta > 0$ an, und wir wenden Satz 2.3 mit $\theta_0 \to 0$ und $\theta_1 \to 2\pi$. Daher,

$$\pi\sqrt{1-e^2}a^2 = \frac{c}{2}p.$$

Wir substituieren in diese Gleichung c aus der Formel $c = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$ von (9.9) und die gewünschte Identität folgt. $\square$

Genauere Informationen über die Zeitparametrisierung gewinnen wir, indem wir eine neue Variabel für die Beschreibung der Bahn einführen. Unten werden wir nur den Fall $h < 0$ explizit bearbeiten. Der Fall $h \geq 0$ wird am Ende ohne Beweis gegeben werden.

Definition 10.6. Es sei $\mathcal{E} \subset \alpha$ eine Ellipse mit Brennpunkt in $\mathbf{0}$, Exzentrizitätsvektor $\mathbf{e} \in \alpha$ und große Halbachse a. Wir nehmen $\mathbf{e}_1 \in S^2 \cap \alpha$ so, dass $\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{e}}$, wenn $e \neq 0$. Es sei $\mathbf{r} \in \mathcal{E}$. Der Winkel f zwischen der Halbgerade $\mathbb{R}^+\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{r}$ ist die sogenannte wahre Anomalie, sodass

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos f}.$$

Wir betrachten nun den Kreis $\mathcal{C} \subset \alpha$ mit Durchmesser gleich der Hauptachse von $\mathcal{E}$ und schreiben $\mathbf{M}$ für seinen Mittelpunkt. Es sei $\mathbf{s}$ der einzige Punkt auf $\mathcal{C}$ so, dass das Lot auf der Hauptachse durch $\mathbf{s}$ schneidet die Ellipse im Punkt $\mathbf{r}$. Der Winkel u zwischen der Halbgerade $\mathbf{M} + \mathbb{R}^+\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{s}$ heißt die exzentrische Anomalie von $\mathbf{r}$. Der Punkt $\mathbf{r}_{\min} \in \mathcal{E}$, für den $u \in 2\pi\mathbb{Z}$ (äquivalent $f \in 2\pi\mathbb{Z}$) ist der Punkt mit minimalem Abstand von $\mathbf{0}$ und heißt Periapsis. Eine Zahl $t_0 \in \mathbb{R}$ heißt Periapsisdurchgang, wenn $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_{\min}$.

Hilfsatz 10.7. *Wir haben die Gleichung*

$$\mathbf{r} = a(\cos u - e)\mathbf{e}_1 + a\sqrt{1-e^2}\sin u\, \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_1.$$

Beweis. Es ist genug die Formel zu zeigen, wenn α die xy-Ebene ist und $\mathbf{e} = (e, 0, 0)$. Wir haben die Gleichungen

$$\mathcal{E}: \quad (x+ae)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2, \qquad \mathcal{C}: \quad (x+ae)^2 + y^2 = a^2. \tag{10.2}$$

Deshalb Haben wir $\mathbf{s} = (x_\mathbf{s}, y_\mathbf{s}) = a(\cos u - e, \sin u)$. Wenn $\mathbf{r} = (x_\mathbf{s}, y_\mathbf{s})$, dann $x_\mathbf{r} = x_\mathbf{s}$ und aus (10.2) folgt $y_\mathbf{r} = \sqrt{1-e^2}y_\mathbf{s}$, wie gewünscht. $\square$

11 Die Kepler-Gleichung 28.5.

In diesem Abschnitt finden wir eine Beziehung zwischen der exzentrischen Anomalie und dem Zeitparameter, die als Kepler-Gleichung bekannt ist.

11.1 Der Fall $c \neq 0$

Satz 11.1. *Die Kurve* $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_\times$ *ist eine maximale Lösung des keplerschen Problems* (9.1) *in einer Ebene* $\alpha = \alpha_\mathbf{r}$ *mit*

große Halbachse a, *Exzentrizitätsvektor* $\mathbf{e} \in \alpha$ *mit* $0 < e < 1$, *Periapsisdurchgang* t_0

genau dann, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{r}(t) = a(\cos u(t) - e)\mathbf{e}_1 + a\sqrt{1-e^2}\sin u(t)\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}_1, \tag{11.1}$$

wobei $u(t)$ *die einzige Lösung der folgenden Kepler-Gleichung ist:*

$$u - e\sin u = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0), \qquad u \in \mathbb{R}. \tag{11.2}$$

Die so entstandene Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist ein monoton wachsender Diffeomorphismus mit* $u(t_0 + kp) = 2\pi k$, *für alle* $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad t(u) := t_0 + \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(u - e\sin u).$$

Wir haben

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(1 - e\cos u) \geq \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(1 - e) > 0.$$

Deshalb ist t invertierbar und wir schreiben $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für die Umkehrfunktion. Da die Funktion t invertierbar ist, ist für alle $t_1 \in \mathbb{R}$ die Zahl $u(t_1)$ die einzige Lösung von (11.2) mit $t = t_1$. Außerdem bekommen wir $u(t_0 + kp) = 2\pi k$, da

$$t(2\pi k) = t_0 + \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}2\pi k = t_0 + kp.$$

Es sei nun $\mathbf{r}$ die Lösung von (9.1) mit große Halbachse a, Exzentrizitätsvektor $\mathbf{e}$ und Periapsisdurchgang t_0. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, wir nehmen an, dass $\alpha_\mathbf{r}$ die xy-Ebene ist und $\mathbf{e} = (e, 0, 0)$. Aus dem Hilfsatz 10.7 wissen wir, dass es eine Funktion

$w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit $w(t_0) = 0$ und $x(t) = a(\cos w(t) - e)$, $y(t) = a\sqrt{1-e^2}\sin w(t)$. Wir berechnen den Drehimpuls

$$c = x\dot{y} - y\dot{x} = a^2\sqrt{1-e^2}\Big((\cos w - e)\cos w + \sin^2 w\Big)\dot{w} = c\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(1 - e\cos w)\dot{w},$$

wo wir (9.9) benutzt haben. Wir teilen durch $c\sqrt{a^3/\mu}$ und integrieren zwischen t_0 und t:

$$w(t) - e\sin w(t) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0).$$

Es folgt daraus, dass $w(t)$ die Kepler-Gleichung löst. Daher $w(t) = u(t)$. $\square$

Bemerkung 11.2. In der Literatur ist üblicher die Kepler-Gleichung in der Form

$$u - e\sin u = \frac{2\pi}{p}(t - t_0)$$

zu finden. Die ist äquivalent zu (11.2), denn

$$\frac{2\pi}{p} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

nach dem dritten keplerschen Gesetz. Die Größe

$$M(t) := \frac{2\pi}{p}(t - t_0) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0)$$

ist die sogenannte **mittlere Anomalie**.

11.2 Geometrische Herleitung der Kepler-Gleichung*

Die Kepler-Gleichung lässt sich auch auf folgender Weise geometrisch beweisen. Es sei $\mathbf{r}(t)$ der Punkt auf $\mathcal{E}$ und $\mathbf{s}(t)$ der entsprechende Punkt auf $\mathcal{C}$. Es sei nun $\tilde{\Omega}_{t_0,t}$ die Region innerhalb von $\mathcal{C}$ zwischen den Halbgeraden $\mathbb{R}^+\mathbf{e}_1$ und $\mathbb{R}^+\mathbf{s}$. Wir möchten den Flächeninhalt von $\tilde{\Omega}_{t_0,t}$ zweierlei berechnen: einerseits durch die exzentrische Anomalie und anderseits durch den Drehimpuls c. Erstens gilt

$$\operatorname{Area}(\tilde{\Omega}_{t_0,t}) = \operatorname{Area}(\mathbf{s}\overset{\frown}{\mathbf{M}}\mathbf{r}_{\min}) - \operatorname{Area}(\Delta(\mathbf{sM0})),$$

wobei $\mathbf{s}\overset{\frown}{\mathbf{M}}\mathbf{r}_{\min}$ der Kreissektor von $\mathcal{C}$ zwischen $\mathbf{s}$ und $\mathbf{r}_{\min}$ ist und $\Delta(\mathbf{sM0})$ das Dreieck mit Scheiteln $\mathbf{s}, \mathbf{M}, \mathbf{0}$. Wir haben

$$\operatorname{Area}(\mathbf{s}\overset{\frown}{\mathbf{M}}\mathbf{r}_{\min}) = \frac{u}{2}a^2, \qquad \operatorname{Area}(\Delta(\mathbf{sM0})) = \frac{a \cdot ae}{2}\sin u.$$

Also,
$$2\text{Area}(\tilde{\Omega}_{t_0,t}) = a^2(u - e\sin u). \tag{11.3}$$
Zweitens bemerken wir, dass
$$\tilde{\Omega}_{t_0,t} = \sigma(\Omega_{t_0,t}),$$
wobei $\sigma : \alpha_{\mathbf{r}} \to \alpha_{\mathbf{r}}$ die lineare Abbildung definiert durch
$$\sigma(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}_1) = x_1\mathbf{e}_1 + \frac{x_2}{\sqrt{1-e^2}}\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}_1$$
ist und $\Omega_{t_0,t}$ die von der Kurve $\mathbf{r}$ im Zeitintervall $[t_0,t]$ überstrichene Region darstellt. Tatsächlich haben wir $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$, $\sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{s}$ und alle die Punkte auf der Hauptachse von $\mathcal{E}$ bleiben fest. Da σ eine Streckung von Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ in Richtung $\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}_1$ ist, werden auch die Flächeninhälte durch die Abbildung σ von einem Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ vergrößert. Also,
$$2\text{Area}(\tilde{\Omega}_{t_0,t}) = 2\text{Area}(\sigma(\Omega_{t_0,t})) = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\text{Area}(\Omega_{t_0,t}) = \frac{c(t-t_0)}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{a\mu}(t-t_0).$$
Das Vergleichen dieser letzten Gleichung mit (11.3) liefert die Kepler-Gleichung. Wir gewinnen auch eine geometrische Interpretation der mittleren Anomalie als
$$\text{Area}(\tilde{\Omega}_{t_0,t}) = \frac{a^2}{2}M(t).$$

11.3 Der Fall $c = 0$

Wir möchten nun die Lösungen $\mathbf{r}$ mit $c = 0$ betrachten. Der Inhalt des nächsten Satzes ist, dass wir die Kurve $\mathbf{r}$ kriegen, wenn wir im letzten Satz $a > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und die Richtung $\mathbf{e}$ fest halten aber lassen wir e gegen 1 gehen.

Satz 11.3. *Es seien $a > 0$, $\mathbf{e}_1 \in S^2$ und $t : 0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir definieren $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ als die Kurve*
$$\mathbf{r}(t) = a(\cos u(t) - 1)\mathbf{e}_1, \tag{11.4}$$
wobei $u(t)$ die einzige Lösung der Gleichung
$$u - \sin u = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0), \qquad u \in \mathbb{R} \tag{11.5}$$
ist. Dann $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein monoton wachsender Homöomorphismus mit $u(t_0 + kp) = 2\pi k$ und $\dot{u}(t_0 + kp) = +\infty$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, die glatt auf $\mathbb{R} \setminus (t_0 + p\mathbb{Z})$ ist. Außerdem, für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist die Einschränkung von $\mathbf{r}$ auf das Intervall $(t_0 + kp, t_0 + (k+1)p)$ die maximale Lösung von (9.1) mit $h = -\mu/(2a)$, Exzentrizitätsvektor $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$ und $r(t_0 + kp + p/2) = 2a$.

Beweis. Wir definieren die Funktion $u \mapsto t(u) = t_0 + \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(u - \sin u)$. Die Funktion ist streng monoton wachsend mit $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}(u) \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $u \in 2\pi\mathbb{Z}$. Daraus folgt die Existenz einer Umkehrfunktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die glatt außerhalb der Punkten $t_0 + kp$ ist, wo $u(t_0 + kp) = 2\pi k$ und $\dot{u}(t_0 + kp) = +\infty$. Das impliziert, dass $u(t)$ die einzige Lösung von (11.5) ist.

Es sei nun $\mathbf{r} : (t_0 + kp, t_0 + (k+1)p) \to -\mathbb{R}^+\hat{\mathbf{e}}$ die maximale Lösung mit $h = -\mu/a$ und $r(t_0 + kp + p/2) = 2a$. Um die Notation zu vereinfachen, betrachten wir nur den Fall $t_0 = 0$ und $k = 0$. Die Erhaltung der Energie lautet

$$\dot{r}^2 = \frac{\mu}{ar}(2a - r). \tag{11.6}$$

Wir definieren die Kurve

$$\mathbf{s} : (0, p) \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{s}(t) := \Big(1 - \frac{r}{a}, \sqrt{\frac{1}{a\mu}} r\dot{r}\Big).$$

Wir berechnen die Norm von $\mathbf{s}$ mit Hilfe von (11.6):

$$s^2 = \Big(1 - \frac{r}{a}\Big)^2 + \frac{r^2\dot{r}^2}{a\mu} = 1 - 2\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2} + \frac{r(2a - r)}{a^2} = 1.$$

Daraus folgt, dass es eine glatte Abbildung $w : (0, p) \to \mathbb{R}$ existiert mit $\mathbf{s} = (\cos w, \sin w)$ und $w(p/2) = \pi$. Wir berechnen die Ableitung von w:

$$\dot{w} = \langle \dot{\mathbf{s}}, \mathbf{i} \cdot \mathbf{s} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a\mu}}\Big(\Big(1 - \frac{r}{a}\Big)\Big(\dot{r}^2 - \frac{\mu}{r}\Big) + \frac{r\dot{r}^2}{a}\Big) = \frac{1}{\sqrt{a\mu}}\Big(\frac{\mu}{a} + \dot{r}^2 - \frac{\mu}{r}\Big) = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \frac{1}{r}$$

Insbesondere ist w monoton steigend. Da $\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}(p) = (1, 0)$ leiten wir $w(0) = 0$ und $w(p) = 2\pi$. Außerdem gilt nach der Definition $r = a(1 - \cos w)$. Deswegen, wenn wir die letzte Gleichung von 0 bis t integrieren, erhalten wir

$$w(t) - \sin w(t) = \sqrt{\frac{\mu}{a}} t.$$

Das heißt, dass $w(t)$ die Kepler-Gleichung löst. Daher $w(t) = u(t)$ und der Satz ist vollständig bewiesen. □

Definition 11.4. Eine Kurve $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, die die Gleichungen (11.1) und (11.2) oder die Gleichungen (11.4) und (11.5) erfüllt, heißt eine **regularisierte Lösung** des keplerschen Problems.

12 Numerische und geometrische Lösungen der KG 4.6.

Es sei $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine regularisierte Lösung des keplerschen Problems mit negativer Energie. Um die Lage von $\mathbf{r}$ zu einer gewissenen Zeit t zu bestimmen, muss man die Kepler-Gleichung

$$u - e \sin u = M(t)$$

nach u lösen. Schon Kepler bezweifelte die Existenz einer geschlossenen Formel für u und schrieb

"Mir genügt die Überzeugung, dass eine Lösung apriori nicht möglich ist wegen der heterogenen Beschaffenheit von Bogen und Sinus. Wer immer mir aber einen Irrtum und einen Ausweg nachweist, der sei mir ein großer Mathematiker gleich Apollonius.".

Wir werden nun zwei numerische Verfahren beschreiben, die eine Annährung der Lösung geben, wenn $e < 1$.

12.1 Banach-Fixpunktsatz

Wir erinnern uns an den Fixpunktsatz von Banach. Es sei (U, d) ein nicht leerer vollständiger metrischer Raum und $f : U \to U$ eine Kontraktion. Das heißt, dass es $\lambda < 1$ gibt mit $d(f(u), f(w)) \le \lambda d(u, w)$, für alle $u, w \in U$. Dann f besitzt genau einen Fixpunkt $\bar{u} \in U$, nämlich einen Punkt mit $f(\bar{u}) = \bar{u}$. Außerdem, für jeden $u_0 \in U$ konvergiert die Folge $u_{n+1} := f(u_n)$ nach $\bar{u}$.

In unserem Fall nehmen wir $U = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(u) = e \sin u + M(t)$. Dann f ist eine Kontraktion mit $\lambda = e$, weil

$$|F(u_2) - F(u_1)| = e|\sin u_2 - \sin u_1| \le e \max_{u \in \mathbb{R}} |f'(u)| \cdot |u_2 - u_1| = e|u_2 - u_1|,$$

wobei $f'(u) := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(u) = \cos u$. Der Fixpunkt $\bar{u}$ von F genügt dann der Kepler-Gleichung

$$\bar{u} = F(\bar{u}) = e \sin \bar{u} + M(t).$$

12.2 Newtonsverfahren

Es sei nun $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $g'(w) := \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}w}(w) > 0$ für alle $w \in \mathbb{R}$. Wenn g_0 eine reelle Zahl ist, möchten wir Werte $u \in \mathbb{R}$ finden mit $g(u) = g_0$. Wenn $w \in \mathbb{R}$ definieren wir $N(w) \in \mathbb{R}$ so dass $(N(w), g_0) \in \mathbb{R}^2$ der Schnittpunkt zwischen der Gerade $y = g_0$ und der Tangente am Graph $\{(u, g(u)) \mid u \in \mathbb{R}\big|\}$ im Punkt $(w, g(w))$. Da ein Punkt (x, y) zur Tangente gehört genau dann, wenn $y = g(w) + g'(w)(x - w)$, finden wir

$$N(w) = w - \frac{g(w) - g_0}{g'(w)}.$$

Für jede $u_0 \in \mathbb{R}$ definieren wir die Folge $u_{n+1} = N(u_n)$. Wenn u_n gegen $\bar{u}$ konvergiert würde, gälte

$$\bar{u} = N(\bar{u}) = \bar{u} - \frac{g(\bar{u}) - g_0}{g'(\bar{u})}.$$

Das heißt $\bar{u}$ genügt der Gleichung $g(\bar{u}) = g_0$. Um die Konvergenz zu sichern, setzen wir die Konvexität oder die Konkavität der Funktion g voraus. Genauer nehmen wir ein, dass es u_{-1}, u_0 gibt mir $g(u_{-1}) \leq g_0$, $g(u_0) \geq g_0$ und $g''(u) \geq 0$ für alle $u \in [u_{-1}, u_0]$. Die Bedingung auf die zweite Ableitung impliziert, dass die Folge $u_{n+1} = N(u_n)$ monoton fallend ist und die untere Schranke u_{-1} besitzt. Also die Folge konvergiert. Eine ähnliche Aussage gilt für Funktionen g, so dass Werte u_{-1}, u_0 existieren mit $g(u_{-1}) \geq g_0$, $g(u_0) \leq g_0$ und $g''(u) \leq 0$ für alle $u \in [u_0, u_{-1}]$.

In unserem Fall nehmen wir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(u) = u - e \sin u$ und $g_0 = M(t)$. Die Ableitung von g ist immer positiv für $e < 1$. Außerdem $g''(u) > 0$ für $u \in (k\pi, (k+1)\pi)$ mit k gerade und $g''(u) < 0$ für $u \in (k\pi, (k+1)\pi)$ mit k ungerade.

Satz 12.1. *Wenn $M(t)$ im Intervall $[2k'\pi, 2(k'+1)\pi]$ für irgendelweche $k' \in \mathbb{Z}$ liegt, konvergiert das Newtonsverfahren mit $u_0 = (2k'+1)\pi$ nach der Lösung der Kepler-Gleichung.*

Beweis. Wir haben $g(k\pi) = k\pi$ für alle ganze Zahlen k. Wenn $M(t) \in [2k'\pi, (2k'+1)\pi]$, setzen wir $u_{-1} = 2k'\pi$, so dass g auf $[u_{-1}, u_0]$ konvex ist und $g(u_{-1}) = u_{-1} \leq M(t) \leq u_0 = g(u_0)$. Wenn $M(t) \in [(2k'+1)\pi, 2(k'+1)\pi]$, setzen wir $u_{-1} = 2(k'+1)\pi$, so dass g auf $[u_0, u_{-1}]$ konkav ist und $g(u_0) = u_0 \leq M(t) \leq u_{-1} = g(u_{-1})$ □

12.3 Die verkürzte Zykloide

Wir geben schließlich ein geometrisches Verfahren, das eine Lösung der Kepler-Gleichung bestimmt für $e \in (0,1)$. Es sei $\mathcal{D}'$ eine Scheibe mit Mittelpunkt $\mathbf{M}$ in der xy-Ebene. Wir betrachten eine Unterscheibe $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ mit gleichem Mittelpunkt $\mathbf{M}$. Wir schreiben $a > 0$ für den Radius von $\mathcal{D}$ und a/e mit $e \in (0,1]$ für den Radius von $\mathcal{D}'$. Die zwei Scheiben bewegen sich als ein einziger starrer Körper und wir markieren einen Punkt P_0 auf dem Rand von $\mathcal{D}$.

Definition 12.2. Die verkürzte Zykloide ist die Kurve $\mathbf{s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die ein Punkt P_0 auf dem Umfang von $\mathcal{D}$ beschreibt, wenn $\mathcal{D}'$ mit Einheitswinkelgeschwindigkeit auf einer festen Gerade abrollt.

Wir möchten nun eine Parametrisierung für $\mathbf{s}$ durch den Wälzwinkel u geben, nämlich den Winkel zwischen $\mathbf{M} + \mathbb{R}^+(\mathbf{s} - \mathbf{M})$ und einer fester Halbgerade $\mathbf{M} + \mathbb{R}^+\hat{\mathbf{e}}$ mit $\hat{\mathbf{e}} \in S^1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $\hat{\mathbf{e}} = (1,0)$, die Gerade die y-Achse ist, $\mathcal{D}'$ sich links der y-Achse befindet, der Mittelpunkt $\mathbf{M}$ auf der x-Achse für $u = 0$ liegt.

Satz 12.3. *Unter der obigen Voraussetzungen lautet die Parametrisierung der verkürzten Zykloide nach dem Wälzwinkel*

$$u \mapsto \mathbf{s}(u) = \frac{a}{e}(e \cos u - 1, e \sin u - u), \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Es sei $Q(u) = (0, y(u))$ der Berührungspunkt zwischen der Scheibe $\mathcal{D}'$ und der y-Achse. Das Abrollen sagt uns, dass $|u| = |y(u)|$. Da $u > 0$ genau dann, wenn $y(u) < 0$ bekommen wir $y(u) = -au$. Nun $\mathbf{M}(u) = (-a/e, y(u))$ und $\mathbf{s}(u) = \mathbf{M}(u) + a(\cos u, \sin u)$. Das substituieren von $\mathbf{M}$ und $y(u)$ liefert die gewünschte Formel. □

Folgerung 12.4. *Der Wälzwinkel $u(t)$, der dem Schnittpunkt $\mathbf{s}(u(t))$ zwischen der verkürzten Zykloide und der Gerade $y = -\frac{a}{e}M(t)$ entspricht, ist die Lösung der Kepler-Gleichung.*

Beweis. Wenn der Punkt $\mathbf{s}(u)$ die y-Koordinate $-\frac{a}{e}M(t)$ besitzt, folgt aus dem Satz 12.3 die Formel

$$-\frac{a}{e}M(t) = \frac{a}{e}(e \sin u - u),$$

die äquivalent zur Kepler-Gleichung ist. □

13 Der Hodographsatz von Hamilton 7.6.

In diesem Abschnitt diskutieren wir einen wichtigen Satz von Hamilton, der besagt, dass die Hodographen der Lösungen des keplerschen Problems entweder Bogen von Kreisen im $\mathbb{R}^3$, falls $\mathbf{c} \neq 0$, oder Teilmengen von Geraden, falls $\mathbf{c} = 0$, sind.

Definition 13.1. Es sei $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Der **Hodograph** von $\mathbf{r}$ ist die Geschwindigkeitskurve $\mathbf{v} := \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} : I \to \mathbb{R}^n$.

Bemerkung 13.2. Der Hodograph hängt von der Parametrisierung der Kurve $\mathbf{r}$ und nicht nur vom Bild $\mathbf{r}(I)$. Genauer, wenn $s \mapsto t(s)$ eine Umparametrisierung ist, dann $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$.

Beispiel 13.3. Der Hodograph der Kurve $\mathbf{r}(t) = (t, t^2/2)$, die die Parabel $y = x^2/2$ parametrisiert, ist die Kurve $\mathbf{v}(t) = (1, 0) + t(0, 1)$, die die Gerade $x = 1$ paarmetrisiert.

Der Hodograph der Kurve $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$, die die Ellipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ parametrisiert, ist die Kurve $\mathbf{v}(t) = (-a \sin t, b \cos t) = \mathbf{r}(t + \pi/2)$ die die gleiche Ellipse mit verschobener Zeit parametrisiert.

Der Hodograph der Kurve $\mathbf{r}(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$, die die Hyperbel $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ parametrisiert, ist die Kurve $\mathbf{v}(t) = (a \sinh t, b \cosh t)$, die die Hyperbel $(x/a)^2 - (y/b)^2 = -1$ parametrisiert.

Definition 13.4. Es seien k und n natürliche Zahlen mit $k < n$. Eine k-Sphäre $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller Punkte in einer gewissenen, eindeutig bestimmten $(k+1)$-dimensionalen **tragenden Ebene** α, die einen festen Abstand ρ von einem Punkt $\mathbf{M}$ in α besitzen. Die Zahl ρ heißt Radius und der Punkt $\mathbf{M}$ Mittelpunkt von $\mathcal{S}$. Wenn $\mathbf{M}_*$ ein weiterer Punkt in $\mathbf{R}^n$ ist und $\mathbf{M}_* \in \alpha$ gilt, heißt die Sphäre $\mathcal{S}$ **radial** (bezüglich $\mathbf{M}_*$). Eine 1-Sphäre wird auch Kreis genannt und mit dem Buchstabe $\mathcal{C}$ gekennzeichnet. Falls $n = 3$ und α eine orientierte 2-Ebene ist, orientierien wir den Kreis $\mathcal{C} \subset \alpha$ gegen den Uhrzeigersinn (bezüglich einer positiven Basis von α).

Wir geben die folgende Charakterisierung von Sphären ohne Beweis an.

Hilfsatz 13.5. *Zwei Aussagen gelten:*

1. *Jede k-Sphäre $\mathcal{S}$ ist die Schnittmenge zwischen der tragenden $(k+1)$-Ebene α und die $(n-1)$-Sphäre $\mathcal{S}'$ mit gleichem Radius und Mittelpunkt.*

2. *Es sei $\mathcal{S}''$ eine $(n-1)$-Sphäre. Wenn α_* eine $(k+1)$-Ebene und $\mathcal{S}_*$ eine nicht in $\mathcal{S}''$ enthaltene k-Sphäre ist, dann sind $\mathcal{S}'' \cap \alpha_*$ und $\mathcal{S}'' \cap \mathcal{S}_*$ entweder die leere Menge, ein Punkt, oder eine $(k-1)$-Sphäre.*

Wir betrachten nun Kreise, nämlich 1-Sphäre. Für Punkte auf ihrer tragenden Ebene kann man die folgende Größe definieren, die von Steiner 1826 eingeführt wurde.

Definition 13.6. Es sei $\mathcal{C}$ ein Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{M}$ und Radius ρ in einer Ebene α. Für jeden Punkt $\mathbf{P} \in \alpha$ definieren wir die Potenz von $\mathbf{P}$ bezüglich $\mathcal{C}$ als

$$\mathrm{Pot}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}) := |\mathbf{M} - \mathbf{P}|^2 - \rho^2.$$

Die Potenz ist positiv, wenn $\mathbf{P}$ außerhalb von $\mathcal{C}$ liegt. Sie ist null, wenn $\mathbf{P}$ auf $\mathcal{C}$ liegt. Sie ist negativ, wenn $\mathbf{P}$ innerhalb von $\mathcal{C}$ liegt.

Hilfsatz 13.7. *Es sei $g \subset \alpha$ eine Gerade durch $\mathbf{P}$ die $\mathcal{C}$ in den Punkten $\mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{Q}_2$ schneidet, wobei $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2$, wenn g tangent zu $\mathcal{C}$ ist. Dann,*

$$\mathrm{Pot}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}) = \langle \mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}, \mathbf{Q}_2 - \mathbf{P} \rangle. \tag{13.1}$$

Beweis. Als ersten Schritt zeigen wir, dass die rechte Seite von (13.1) unabhängig von g ist. Wir betrachten nur den Fall, wobei $\mathbf{P}$ außerhalb von $\mathcal{C}$ liegt. Es sei g' eine weitere Gerade durch $\mathbf{P}$, die $\mathcal{C}$ in den Punkten $\mathbf{Q}_1'$ und $\mathbf{Q}_2'$ schneidet. Die 3-Ecke $\Delta(\mathbf{Q}_1\mathbf{P}\mathbf{Q}_2')$ und $\Delta(\mathbf{Q}_1'\mathbf{P}\mathbf{Q}_2)$ sind ähnlich, weil sie die gleichen Winkel besitzen: $\widehat{\mathbf{Q}_1\mathbf{P}\mathbf{Q}_2'} = \widehat{\mathbf{Q}_1'\mathbf{P}\mathbf{Q}_2}$, weil $\mathbf{P}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ und $\mathbf{P}, \mathbf{Q}_1', \mathbf{Q}_2'$ jeweil kollinear sind, und $\widehat{\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2'\mathbf{P}} = \widehat{\mathbf{Q}_1'\mathbf{Q}_2\mathbf{P}}$, weil die Beiden Umfangswinkel zum Bogen zwischen $\mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{Q}_1'$ sind. Das Verhälnis zwischen den Längen der entsprechenden Seite sind also gleich

$$\frac{|\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}|}{|\mathbf{Q}_1' - \mathbf{P}|} = \frac{|\mathbf{Q}_2 - \mathbf{P}|}{|\mathbf{Q}_2' - \mathbf{P}|}.$$

Daher gilt

$$\langle \mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}, \mathbf{Q}_2 - \mathbf{P} \rangle = |\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}_2 - \mathbf{P}| = |\mathbf{Q}_1' - \mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}_2' - \mathbf{P}| = \langle \mathbf{Q}_1' - \mathbf{P}, \mathbf{Q}_2' - \mathbf{P} \rangle.$$

Wenn g' die Gerade, die durch $\mathbf{P}$ und $\mathbf{M}$ läuft haben wir

$$|\mathbf{Q}_1' - \mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}_2' - \mathbf{P}| = (|\mathbf{M} - \mathbf{P}| - \rho) \cdot (|\mathbf{M} - \mathbf{P}| + \rho) = |\mathbf{M} - \mathbf{P}|^2 - \rho^2 = \mathrm{Pot}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}). \quad \square$$

Die mögliche Lagen des Punktes $\mathbf{P}$ bezüglich $\mathcal{C}$ sondern einen Bogen auf $\mathcal{C}$ aus.

Definition 13.8. Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathbf{P}$ ein Kreis und ein Punkt in der Ebene α. Der Bogen $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P})$ von $\mathcal{C}$ über $\mathbf{P}$ ist definiert als

$$\mathcal{B}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}) := \mathcal{C} \setminus \left\{ \mathbf{Q} \in \alpha \;\middle|\; |\mathbf{Q} - \mathbf{P}|^2 \leq \mathrm{Pot}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}) \right\}.$$

Wir bemerken, dass

1. wenn $\mathbf{P}$ im Inneren von $\mathcal{C}$ liegt, ist $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}) = \mathcal{C}$;
2. wenn $\mathbf{P}$ auf $\mathcal{C}$ liegt, ist $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}) = \mathcal{C} \setminus \{\mathbf{P}\}$;
3. wenn $\mathbf{P}$ im Äußeren von $\mathcal{C}$ liegt, ist $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P})$ der Bogen zwischen den zwei Tangenten g_1, g_2 an $\mathcal{C}$ durch $\mathbf{P}$. In diesem Fall scheiden sich die Kreise $\{|\mathbf{Q} - \mathbf{P}|^2 \leq \mathrm{Pot}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P})\}$ und $\mathcal{C}$ in den Berührungspunkten der Tangenten g_1, g_2 senkrecht.

Bemerkung 13.9. Die Definitionen von Potenz und Bogen über einem Punkt $\mathbf{P}$ lassen sich für radiale k-Sphären $\mathcal{S}$ bezüglich $\mathbf{P}$ unmittelbar übertragen. Eine entsprechende Version des Hilfsatzes 13.7 gilt in dieser Allgemeinheit.

Satz 13.10 (Hamilton)**.** *Es besteht eine Bijektion* $\mathbf{r} \mapsto \mathcal{C}_\mathbf{r}$ *zwischen der Menge der Lösungen* $\mathbf{r}$ *des keplerschen Problems mit* $\mathbf{c} \neq 0$ *und der Menge der orientierten radialen Kreise in* $\mathbb{R}^3$*, wenn wir zwei Lösungen mit verschobener Zeitparametrisierung identifizieren. Hier stellt* $\mathcal{C}_\mathbf{r}$ *der Kreis in der Bewegungsebene von* $\mathbf{r}$ *mit Radius* $\rho_\mathbf{r}$ *und Mittelpunkt* $\mathbf{M}_\mathbf{r}$ *dar, wobei*

$$\rho_\mathbf{r} = \frac{\mu}{c}, \qquad \mathbf{M}_\mathbf{r} = \frac{\mu}{c}\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}. \tag{13.2}$$

Außerdem gilt es

$$\mathrm{Pot}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}}(\mathbf{0}) = 2h, \tag{13.3}$$

wobei h *die Energie von* $\mathbf{r}$ *ist. Schließlich parametrisiert der Hodograph* $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ *den Bogen* $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}}(\mathbf{0})$ *gegen den Uhrzeigersinn.*

Beweis. Aus Folgerung 10.4 wissen wir, dass $\mathbf{r}$ von den Vektoren $\mathbf{c}$ und $\mathbf{e}$ bis auf Zeitverschiebung eindeutig bestimmt wird. Also genügt es zu zeigen, dass die Abbildung $(\mathbf{c}, \mathbf{e}) \mapsto (\alpha_\mathbf{r}, \rho_\mathbf{r}, \mathbf{M}_\mathbf{r})$ eine Bijektion ist, wobei $\alpha_\mathbf{r}$ die durch $\mathbf{c}$ orientierte Bewegungsebene ist. Wenn $\mathbf{u} \in S^2$ der Normalenvektor zu $\alpha_\mathbf{r}$ ist, sind die Umkehrsformeln durch

$$\mathbf{c} = \frac{\mu}{\rho_\mathbf{r}}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{e} = -\frac{1}{\rho_\mathbf{r}}\mathbf{i}\cdot\mathbf{M}_\mathbf{r}$$

gegeben. Für die Potenz benutzen wir (9.6):

$$\mathrm{Pot}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}}(\mathbf{0}) = M_\mathbf{r}^2 - \rho_\mathbf{r}^2 = \frac{\mu^2}{c^2}(e^2 - 1) = 2h.$$

Wir schreiben $\hat{\mathbf{r}}(\theta) = \cos\theta\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}_1$, sodass $\mathbf{i}\cdot\mathbf{r}(\theta) = -\sin\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}_1$. Wir multiplizieren (9.4) durch $\mu\mathbf{i}/c$ und bekommen

$$\mathbf{v}(\theta) = \frac{\mu}{c}\Big(-\sin\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}_1\Big) + \frac{\mu}{c}\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}. \tag{13.4}$$

Also $\mathbf{v}$ parametrisiert einen Bogen auf dem Kreis $\mathcal{C}_\mathbf{r}$ und θ stellt den Winkel zwischen $\mathbf{v}-\mathbf{M}$ und $\mathbb{R}^+\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}$ gegen den Uhrzeigersinn dar. Wenn $e < 1$ läuft θ auf der ganzen $\mathbb{R}$. Außerdem ist $\mathrm{Pot}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}}(\mathbf{0}) < 0$ und daher $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}}(\mathbf{0}) = \mathcal{C}_\mathbf{r}$. Wenn $e = 1$, läuft θ in $(-\pi, \pi)$. Außerdem ist $\mathrm{Pot}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}}(\mathbf{0}) = 0$ und daher $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}}(\mathbf{0}) = \mathcal{C}_\mathbf{r}\backslash\{\mathbf{0}\}$. In diesem Fall für π und $-\pi$ ergibt die rechte Seite in (13.4) genau $\mathbf{0}$. Wenn $e > 1$, läuft θ in $(-\theta_e, \theta_e)$, wobei $\theta_e = \arccos(-1/e)$. Außerdem ist $\mathrm{Pot}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}}(\mathbf{0}) > 0$ und daher ist $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}}(\mathbf{0})$ der Bogen zwischen den zwei Berührungspunkte $\mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{Q}_2$. Wenn wir φ für den Winkel $\widehat{\mathbf{0}\mathbf{M}_\mathbf{r}\mathbf{Q}_2}$ schreiben, gilt $\cos\varphi = \rho_\mathbf{r}/M_\mathbf{r} = 1/e$. Es folgt daraus, dass $\cos(\pi - \varphi) = -1/e$ und deshalb $\theta_e = \pi - \varphi$. Also $\mathbf{v}$ parametrisiert genau den Bogen $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}}$. □

Wir beschreiben nun die Hodographe der regularisierten Lösungen $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit verschwindendem Drehimpuls. Zu diesem Zweck definieren wir den erweiterten euklidischen Raum.

Definition 13.11. Der erweiterte euklidische n-Raum ist der topologische Raum

$$\bar{\mathbb{R}}^n := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\},$$

wobei $U \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ offen ist, entweder wenn U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist oder $\infty \in U$ und $\bar{\mathbb{R}}^n \setminus U$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 13.12. *Es sei X ein topologischer Raum, $\mathbf{x}_0 \in X$ ein Punkt und $F : X \setminus \{\mathbf{x}_0\} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Es sei angenommen, dass es für alle $C > 0$ eine Umgebung $U \subset X$ von $\mathbf{x}_0$ gibt, sodass $|F(\mathbf{x})| > C$ für alle $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}_0\}$. Zeigen Sie, dass die erweiterte Abbildung $\bar{F} : X \to \bar{\mathbb{R}}^n$ stetig ist, wobei $\bar{F}(\mathbf{x}_0) = \infty$ und $\bar{F}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$, wenn $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Es sei Y ein topologischer Raum, $\mathbf{y}_0 \in Y$ ein Punkt und $G : \mathbb{R}^n \to Y$ eine Abbildung. Es sei angenommen, dass es für alle Umgebungen $U \subset Y$ von $\mathbf{y}_0$ eine Zahl $C > 0$ gibt, sodass $G(\mathbf{r}) \in U$ für alle $\mathbf{r}$ mit $r > C$. Zeigen Sie, dass die erweiterte Abbildung $\bar{G} : \bar{\mathbb{R}}^n \to Y$ stetig ist, wobei $\bar{G}(\infty) = \mathbf{y}_0$ und $\bar{G}(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r})$.*

Wenn $\mathbf{r}$ einen negative Energie besitzt, dann ist $\mathbf{r}$ eine p-periodische Kurve mit $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$. In diesem Fall setzen wir

$$\mathbf{v} : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}^3, \qquad \mathbf{v}(t) = \begin{cases} \dot{\mathbf{r}}(t), & \text{if } t \notin p\mathbb{Z}; \\ \infty, & \text{if } t \in p\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Da $\lim_{t \to pk} v(t) = \infty$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, sehen wir, dass $\mathbf{v}$ eine stetige Abbildung ist. In diesem Fall parametrisiert $\mathbf{v}$ die ganze erweiterte Gerade $\bar{\mathbb{R}}\mathbf{e}$ in Richtung $\mathbf{e}$.

Es sei nun angenommen, dass $\mathbf{r}$ eine Energie $h \geq 0$ besitzt. Wir wählen die Parametrisierung, sodass $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$. In diesem Fall setzen wir,

$$\mathbf{v} : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}^3, \qquad \mathbf{v}(t) = \begin{cases} \dot{\mathbf{r}}(t), & \text{if } t \neq 0; \\ \infty, & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

Die Kurve $\mathbf{v}$ ist stetig und parametrisiert die Menge $\bar{\mathbb{R}}\mathbf{e} \setminus \{v^2 \leq 2h\}$. Bemerken Sie, dass solche Menge homöomorph zu einem offenen Intervall ist.

14 Satz von Moser: die Aussage 11.6

Wir stellen nun die Aussage des Satzes von Moser vor, den wir in der nächsten vier Vorlesungen beweisen werden.

Satz 14.1 (Moser)**.** *Die stereographische Projektion $\Psi : S^3 \to \bar{\mathbb{R}}^3$ bildet eine Bijektion zwischen den Großkreisen γ auf S^3 und den Hodographen $\mathbf{v}$ der Lösungen $\mathbf{r}$ des keplerschen Problems mit $h = -1/2$. Wenn γ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, wird $\mathbf{v} = \Psi \circ \gamma$ nach der exzentrischen Anomalie u parametrisiert.*

Bemerkung 14.2. Man kann den Wert $h = -1/2$ mit einem beliebigen negativen Wert h substituieren. In diesem Fall muss man den Radius ρ der Sphäre im Definitionsbereich von Ψ wählen, sodass $\rho^2 = -\frac{1}{2h}$, und die Hodographen durch $s := \frac{1}{\sqrt{2|h|}}u$.

Wir erklären nun alle die Begriffen in dem obigen Satz.

Definition 14.3. Eine Kurve $\mathbf{x} : I \to \mathbf{R}^n$ ist nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn $|\dot{\mathbf{x}}(t)| = 1$ für alle $t \in I$.

Aufgabe 14.4. *Es sei $\mathbf{x}(t) = r(\cos t, \sin t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ eine Parametrisierung des Kreises mit Radius r in $\mathbb{R}^2$. Ist $\mathbf{x}$ nach der Bogenlänge parametrisiert? Wie kann man eine Umparametrisierung $s \mapsto t(s)$ wählen, sodass $s \mapsto \mathbf{x}(t(s))$ nach der Bogenlänge parametrisiert wird?*

Definition 14.5. Es sei S^{n-1} die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ und identifizieren $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Wir schreiben $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, z)$ für die Punkte in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, wobei $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $z \in \mathbb{R}$. Dann $\mathbf{N} = (0, 1) \in S^{n-1}$ und $\mathbf{S} = (0, -1) \in S^{n-1}$ stellen die Nord- und Südpol dar. Es sei nun $\mathbb{R}^{n-1}$ mit $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ identifiziert.

Definition 14.6. Die stereographische Projektion $\tilde{\Psi} : \mathbb{R}^n \setminus \{z = 1\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ ist die glatte Abbildung, die jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $z \neq 1$ den Punkt $\tilde{\Psi}(\mathbf{x})$ zuordnet, wobei $(\tilde{\Psi}(\mathbf{x}), 0)$ auf der Gerade $\mathbf{N} + \mathbb{R}(\mathbf{x} - \mathbf{N})$ liegt. Wir definieren die Einschränkung der stereographischen Projektion auf der Einheitssphäre als die Abbildung $\Psi : S^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}^{n-1}$, $\Psi(\mathbf{N}) = \infty$ und $\Psi(\mathbf{x}) = \tilde{\Psi}(\mathbf{x})$, falls $\mathbf{x} \neq \mathbf{N}$.

Satz 14.7. *Wir haben die Formel*

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{y}, z) = \frac{1}{1 - z}\,\mathbf{y}, \qquad \forall\, (\mathbf{y}, z) \in \mathbb{R}^n,\ z \neq 1.$$

Die Abbildung $\Psi : S^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ ist ein Homöomorphismus, dessen Umkehrabbildung $\Phi : \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \to S^{n-1}$ durch die folgende Formel definiert ist:

$$\Phi(\infty) = \mathbf{N}, \qquad \Phi(\mathbf{v}) = \Big(\frac{2}{1 + v^2}\mathbf{v}, 1 - \frac{2}{1 + v^2}\Big), \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Beweis. Wir suchen nach $t \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $t(\mathbf{y}, z) + (1-t)\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Es folgt daraus, dass $tz + 1 - t = 0$. Also $t = \frac{1}{1-z}$ und $\tilde{\Psi}(\mathbf{y}, z) = t\mathbf{y} = \frac{1}{1-z}\mathbf{y}$. Um die Stetigkeit von Ψ zu beweisen, reicht es nach Aufgabe 13.12 die Formel

$$|\Phi(\mathbf{y}, z)| = \frac{y}{1-z} = \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-z} = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, \qquad \forall\, (\mathbf{y}, z) \in S^{n-1} \setminus \{\mathbf{N}\},$$

wobei wir die Gleichung $y^2 + z^2 = 1$ benutzt haben. Wenn $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$, definieren wir $\Phi(\mathbf{v})$ durch die Eigenschaften

- $\Phi(\mathbf{v}) = t(\mathbf{w}, 0) + (1-t)\mathbf{N}, \quad t > 0,$
- $|\Phi(\mathbf{v})|^2 = 1.$

Wir setzen die erste Gleichung in die zweite ein und bekommen

$$t^2 v^2 + 1 + t^2 - 2t = 1.$$

Wir lösen nach t und finden $t = \frac{2}{1+v^2}$ und die gewünschte Formel folgt. Die Abbildung Φ ist stetig nach Aufgabe 13.12, weil $\lim_{|\mathbf{v}|\to\infty} \Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{N}$. □

Definition 14.8. Ein Großkreis auf S^{n-1} ist die Schnittmenge zwischen eine 2-Ebene α durch $\mathbf{0}$ und S^{n-1}.

Aufgabe 14.9. *Zeigen Sie, dass ein Großkreis den Nordpol enthält genau dann, wenn er den Südpol enthält.*

Wir möchten nun Großkreise nach der Bogenlänge parametrisieren. Wenn $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ eine orthonormale Basis für α ist, dann ist es leicht zu sehen, dass

$$\gamma_\alpha(u) := -\sin u\, \mathbf{e}_1 + \cos u\, \mathbf{e}_2 \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}$$

die gewünschte Parametrisierung liefert. Wenn α nicht in $\mathbb{R}^{n-1}$ enthalten ist, nehmen wir $\mathbf{e}_1$ auf der Gerade $\alpha \cap \mathbb{R}^{n-1}$. Dann $\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_3, e)$, wobei $e > 0$. Wenn $e = 1$, dann $\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{e}_2 = \mathbf{N}$. Wenn $e < 1$, dann schreiben wir $\mathbf{f}_1$ für den normierten Vektor mit $\mathbf{e}_3 = e_3\mathbf{f}_1$. Es folgt daraus, dass

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1 \rangle = 0, \qquad e_3 = \sqrt{1-e^2}.$$

Also bekommen wir die Formel

$$\gamma_\alpha(u) = \Big(-\sin u\, \mathbf{e}_1 + \sqrt{1-e^2}\cos u\, \mathbf{f}_1, e\cos u \Big). \tag{14.1}$$

Definition 14.10. Es sei $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Die antipodale Abbildung $A : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$ mit Mittelpunkt $\mathbf{M}$ ist auf folgender Weise definiert. Für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist $A(\mathbf{x})$ der einzige andere Punkt auf der Gerade durch $\mathbf{x}$ und $\mathbf{M}$, der gleichen Abstand zu $\mathbf{M}$ wie $\mathbf{x}$ besitzt. Wir setzen $A(\infty) = \infty$.

Aufgabe 14.11. *Zeigen Sie, dass alle $(n-1)$-Sphären mit Mittelpunkt $\mathbf{M}$ invariant durch A sind. Schreiben Sie anschließend eine Formel für A und zeigen Sie, dass $A(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$, falls $\mathbf{M} = \mathbf{0}$.*

Satz 14.12. *Die Großkreise sind diejenige Kreise auf S^{n-1}, die invariant durch die antipodale Abbildung mit Mittelpunkt* $\mathbf{0}$ *sind.*

Beweis. Es sei $\mathcal{C}$ ein Kreis auf S^{n-1} mit tragender 2-Ebene α. Es sei angenommen, dass $\mathcal{C}$ ein Großkreis ist. Daher gehört $\mathbf{0}$ zu α und α ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Also $\mathbf{x} \in \alpha$ impliziert $-\mathbf{x} \in \alpha$. Nach der obigen Aufgabe ist $\mathcal{C}$ invariant durch A. Es sei nun umgekehrt angenommen, dass $\mathcal{C}$ invariant durch A ist. Wir nehmen $\mathbf{x} \in \mathcal{C} \subset \alpha$, sodass $-\mathbf{x} \in \mathcal{C} \subset \alpha$. Da α ein affiner Unterraum ist, enthält α die Gerade durch $\mathbf{x}$ und $-\mathbf{x}$. Da der Ursprung $\mathbf{0}$ ein Punkt auf dieser Gerade ist, folgt es, dass $\mathbf{0} \in \alpha$. Deshalb ist $\mathcal{C}$ ein Großkreis. $\square$

15 Inversionen: Definitionen 14.6.

Um die stereographische Projektion besser zu verstehen betrachten wir nun Inversionen in $\mathbb{R}^n$ oder Kugelspiegelungen, die auch von Steiner eingeführt wurden.

Definition 15.1. Es sei $\mathcal{S}_*$ eine $(n-1)$-Sphäre in $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt $\mathbf{M}_*$ und Radius ρ_*. Die positive, beziehungsweise negative, Inversion an S_* ist die Abbildung $I_*^{\pm} : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$, die auf folgender Weise definiert ist. Für alle Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{M}_*\}$ liegt $I_*^{\pm}(\mathbf{x})$ auf der Gerade $\mathbf{M}_* + \mathbb{R}(\mathbf{x} - \mathbf{M}_*)$ und

$$\langle I_*^+(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_*, \mathbf{x} - \mathbf{M}_* \rangle = +\rho_*^2, \qquad \langle I_*^-(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_*, \mathbf{x} - \mathbf{M}_* \rangle = -\rho_*^2.$$

Schließlich setzen wir $I_*^{\pm}(\mathbf{0}) = \infty$ und $I_*^{\pm}(\infty) = \mathbf{0}$.

Inversionen besitzen folgende vier Eigenschaften:

1. Es gilt die Formel

$$|I_*^{\pm}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_*| \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{M}_*| = \rho_*^2, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{M}_*\}. \tag{15.1}$$

2. Die Punkte im Inneren von $\mathcal{S}_*$ sind im Äußeren von $\mathcal{S}_*$ abgebildet und umgekehrt. Wir haben $I_*^+(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ genau dann, wenn $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_*$. Die Einschränkung von I_*^+ auf $\mathcal{S}_*$ ist die Identität. Wenn $A_* : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$ die antipodale Abbildung mit Mittelpunkt $\mathbf{M}_*$ ist, haben wir $I_*^-(\mathbf{x}) = A_*(\mathbf{x})$ genau dann, wenn $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_*$.

3. Die Inversionen sind Involutionen. Das heißt, dass $I_*^+(I_*^+(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ und $I_*^-(I_*^-(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n$. Insbesondere sind I_*^+ und I_*^- bijektiv.

4. Es gilt die Formel $I_*^- = I_*^+ \circ A_*$.

Aufgabe 15.2. *Beweisen Sie die obigen vier Eigenschaften. Leiten Sie eine Formel für die positive und negative Inversion her.*

16 Inversionen: der Hauptsatz 18.6.

Es wird für uns am wichtigsten zu verstehen, wohin die Ebenen und die Sphären durch Inversionen abgebildet werden. Die Situation wird in dem unten stehenden Hauptsatz über Inversionen geklärt.

Satz 16.1. *Die Abbildung $I_*^{\pm} : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$ bildet*

(a) jede (erweiterte) k-Ebene α durch $\mathbf{M}_*$ in sich selbst ab;

(b) jede (erweiterte) k-Ebene α disjunkt von $\mathbf{M}_*$ auf eine k-Sphäre $\mathcal{S} := I_*^{\pm}(\alpha)$ durch $\mathbf{M}_*$ ab und umgekehrt. Wenn α' die $(k+1)$-Ebene, die α und $\mathbf{M}_*$ enthält, ist, sodass, die Gleichungen $\alpha = \{\mathbf{x} \in \alpha' \mid \langle \mathbf{x} - \mathbf{M}_*, \mathbf{u}\rangle = d\}$ und $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \alpha' \mid |\mathbf{x} - \mathbf{M}| = |\mathbf{M}_* - \mathbf{M}|\}$ für irgendwelche $\mathbf{u} \in S^{n-1} \cap \alpha'$, $d > 0$ und $\mathbf{M} \in \alpha'$ gelten, dann

$$|\mathbf{M} - \mathbf{M}_*| = \frac{\rho_*^2}{2d}, \qquad \mathbf{M} = \mathbf{M}_* \pm \frac{\rho_*^2}{2d}\mathbf{u}; \tag{16.1}$$

(c) jede k-Sphäre $\mathcal{S}$ disjunkt von $\mathbf{M}$ auf eine k-Sphäre $\mathcal{S}' := I_*^{\pm}(\mathcal{S})$ disjunkt von $\mathbf{M}$ ab. Wenn die Sphäre $\mathcal{S}$ radial bezüglich $\mathbf{M}_*$ ist, dann

$$\mathcal{S}' = \pm\frac{\rho_*^2}{\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}(\mathbf{M}_*)}}(\mathcal{S} - \mathbf{M}_*) + \mathbf{M}_*. \tag{16.2}$$

Wir bekommen nämlich die Sphäre $\mathcal{S}'$ durch eine Streckung mit Zentrum $\mathbf{M}_*$ und Faktor $\pm\rho_*^2/\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}(\mathbf{M}_*)}$.

Das Vorzeichen + (bzg. −) in den Formeln (16.1) und (16.2) ist mit I_*^+ (bzg. I_*^-) zu nehmen.

Beweis. Wir durchführen den Beweis nur für die positive Inversion. Die Leser können dann die Argumente zu der negativen Inversion anpassen. Es sei α eine erweiterte k-Ebene mit $\mathbf{M}_* \in \alpha$. Für alle $\mathbf{x} \in \alpha$ gehört der Punkt $I_*^+(\mathbf{x})$ auf der Gerade durch $\mathbf{M}_*$ und $\mathbf{x}$. Diese Gerade ist in α enthält, weil α ein affiner Raum ist. Das zeigt (a).

Es sei nun α eine erweiterte k-Ebene mit $\mathbf{M}_* \notin \alpha$ und schreiben wir α' für die erweiterte $(k+1)$-Ebene die $\mathbf{M}_*$ und α enthält. Nach (a) können wir die Inversion auf α' einschränken. Das heißt, dass ohne Beschränkung der Allgeminheit $\alpha' = \bar{\mathbb{R}}^n$ gilt und $k = n-1$. In diesem Fall gibt es $\mathbf{u} \in S^{n-1}$ und $d >$ so, dass $\mathbf{x} \in \alpha$ genau dann, wenn $\langle \mathbf{x} - \mathbf{M}_*, \mathbf{u}\rangle = d$. Wir müssen jetzt das Bild $I_*^+(\alpha)$ bestimmen. Erstens bemerken wir, dass $\mathbf{M}_* = I_*^+(\infty) \in I_*^+(\alpha)$. Dann sei $\mathbf{P} = \mathbf{M}_* + d\mathbf{u} \in \alpha$ der Punkt auf α mit minimalem Abstand zu $\mathbf{M}_*$. Wir haben

$$I_*^+(\mathbf{P}) = \mathbf{M}_* + \frac{\rho_*^2}{d}\mathbf{u}. \tag{16.3}$$

Es sei nun $\mathbf{x} \in \alpha$ mit $\mathbf{x} \neq \infty$ und $\mathbf{x} \neq \mathbf{P}$. Wir behaupten, dass die Dreiecke $\Delta(\mathbf{x}\mathbf{P}\mathbf{M}_*)$ und $\Delta(I_*^+(\mathbf{P})I_*^+(\mathbf{x})\mathbf{M}_*)$ ähnlich sind. Sie besitzen einen gemeinsamen Winkel mit Scheitel $\mathbf{M}_*$ und außerdem nach (15.1) und (16.3)

$$\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{M}_*|}{|\mathbf{P} - \mathbf{M}_*|} = \frac{\rho_*^2}{d|I_*^+(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_*|} = \frac{|\mathbf{P} - \mathbf{M}_*|}{|I_*^+(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_*|}.$$

Es folgt daraus, dass $\Delta(I_*^+(\mathbf{P})I_*^+(\mathbf{x})\mathbf{M}_*)$ ein rechtwinkliges Dreieck ist, wobei die Hypothenuse $I_*^+(\mathbf{P})\mathbf{M}_*$ ist. Nach dem Satz von Thales liegt $I_*^+(\mathbf{x})$ auf der $(n-1)$-Sphäre $\mathcal{S}$ mit Mittelpunkt $\mathbf{M} = \mathbf{M}_* + \frac{\rho_*^2}{2d}\mathbf{u}$. Umgekehrt ist jeder Punkt $\mathbf{y} \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{M}_*\}$ das Bild von $\mathbf{x} \in \alpha$, wobei $\mathbf{x}$ der einzige Schnittpunkt zwischen α und der Gerade durch $\mathbf{y}$ und $\mathbf{M}_*$ ist. Es bleibt zu zeigen, dass alle möglichen $(n-1)$-Sphären $\mathcal{S}$ das Bild von irgendwelcher α sind. Nach Gleichung (16.1) hat die gewünschte α

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{M} - \mathbf{M}_*}{|\mathbf{M} - \mathbf{M}_*|}, \qquad d = \frac{\rho_*^2}{2|\mathbf{M} - \mathbf{M}_*|}.$$

Wir zeigen nun (c). Es sei α die $(k+1)$-Ebene, die $\mathcal{S}$ enthält. Erstens nehmen wir an, dass $\mathbf{M}_* \in \alpha$. In diesem Fall können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $k = n-1$ betrachten. Es sei $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ und nehme man die Gerade durch $\mathbf{M}_*$ und $\mathbf{x}$. Es sei $\mathbf{x}'$ der weitere Schnittpunkt zwischen dieser Gerade und $\mathcal{S}$. Nach dem Hilfsatz 13.7 und der Formel (15.1) bekommen wir

$$|I_*^+(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_*| = \frac{\rho_*^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{M}_*|} = \frac{\rho_*^2}{|\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)|}|\mathbf{x}' - \mathbf{M}_*|.$$

Die Halbgerade $\mathbf{M}_* + \mathbb{R}^+(\mathbf{x} - \mathbf{M}_*)$ enthält $I_*^+(\mathbf{x})$ und enthält $\mathbf{x}'$ genau dann, wenn die Potenz positiv ist. Es folgt daraus, dass

$$I_*^+(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_* = \frac{\rho_*^2}{\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)}(\mathbf{x}' - \mathbf{M}_*).$$

Also gehört $I_*^+(\mathbf{x})$ zu der Sphäre $\mathcal{S}'$, die durch (16.2) gegeben ist. Jeder Punkt $\mathbf{y} \in \mathcal{S}'$ ist das Bild von $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, wobei $\mathbf{x}$ einer der zwei Schnittpunkte zwischen $\mathcal{S}$ und der Gerade durch $\mathbf{M}_*$ und $\mathbf{y}$ ist. Das zeigt (c), wenn $\mathbf{M}_* \in \alpha$. Es sei nun angenommen, dass $\mathbf{M}_* \notin \alpha$. Es sei $\mathcal{S}''$ eine $(n-1)$-Sphäre $\mathcal{S}''$, so dass $\mathcal{S} = \mathcal{S}'' \cap \alpha$. Wir haben $I_*^+(\mathcal{S}) = I_*^+(\mathcal{S}'') \cap I_*^+(\alpha)$. Nach (b) und dem Teil von (c), den wir schon bewiesen haben, ist $I_*^+(\mathcal{S})$ die Schnittmenge zwischen einer $(n-1)$-Sphäre und einer $(k+1)$-Sphäre oder zwischen einer $(n-1)$-Ebene und einer $(k+1)$-Sphäre. In beiden Fällen ist die Schnittmenge eine k-Sphäre nach Hilfsatz 13.5. Schließlich enthält $I_*^+(\mathcal{S})$ den Punkt $\mathbf{M}_*$ nicht, weil $\infty \notin \mathcal{S}$. □

Folgerung 16.2. *Die stereographische Projektion $\Psi : S^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ ist die Eischränkung der positiven Inversion $I_*^+ : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$ an der Sphäre $\mathcal{S}_*$ mit Mittelpunkt $\mathbf{M}_* = \mathbf{N}$ und Radius $\rho_* = \sqrt{2}$. Insbesondere bildet Ψ Kreise $\mathcal{C}$ mit $\mathbf{N} \in \mathcal{C}$ auf Geraden in $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ ab und Kreise $\mathcal{C}$ mit $\mathbf{N} \notin \mathcal{C}$ auf Kreise in $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$.*

Beweis. Wenn wir $\mathbf{M}_* = \mathbf{N}$ als Mittelpunkt der gesuchten Sphäre $\mathcal{S}_*$ setzen, dann ist $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ durch $\mathbf{u} = -\mathbf{N}$ und $d = 1$ gegeben. Da $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ folgt es aus (16.1), dass $\rho_*^2 = 2$, wie gewünscht. □

17 Satz von Moser: der Beweis 21.6.

Der Hauptsatz über Inversionen erlaubt uns auch zu bestimmen, welche Sphären invariant durch Inversionen sind.

Satz 17.1. *Eine radiale Sphäre $\mathcal{S} \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ bezüglich $\mathbf{M}_*$ ist invariant durch I_*^- genau dann, wenn*

$$\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = -\rho_*^2.$$

Das passiert genau dann, entweder wenn $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_*$ oder wenn für jede 2-Ebene α' mit $\mathbf{M}_* \in \alpha'$ die Kreise $\mathcal{S} \cap \alpha'$ und $\mathcal{S}_* \cap \alpha'$ sich orthogonal schneiden.

Beweis. Es sei $\mathcal{S} \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Sphäre. Wenn $\mathbf{M}_* \in \mathcal{S}$ gilt, ist das Bild von $\mathcal{S}$ eine Ebene nach Satz (16.1).(b) und deswegen kann $\mathcal{S}$ nicht invariant sein. Es sei nun angenommen, dass $\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = -\rho_*^2$. Aus (16.2) folgt es, dass $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$, also $I_*^-(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Es sei nun umgekehrt angenommen, dass $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$. Dann besitzen $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$ den gleichen Radius $\rho = \rho'$ und den gleichen Mittelpunkt $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$. Nach (16.2) haben wir,

$$\mathbf{M}' = -\frac{\rho_*^2}{\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_*) + \mathbf{M}_*, \qquad \rho' = \frac{\rho_*^2}{|\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)|}\rho.$$

Also, wenn $\mathbf{M} \neq \mathbf{M}_*$, dann folgt es aus der ersten Gleichung, dass $\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = -\rho_*^2$. Wenn $\mathbf{M} = \mathbf{M}_*$, dann $\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) < 0$ und aus der zweiten Gleichung folgt es nochmal, dass $\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = -\rho_*^2$. □

Satz 17.2. *Eine radiale Sphäre $\mathcal{S} \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ bezüglich $\mathbf{M}_*$, die nicht in $\mathcal{S}_*$ enthalten ist, ist invariant durch I_*^+ genau dann, wenn*

$$\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = \rho_*^2.$$

Das passiert genau dann, wenn für jede 2-Ebene α' mit $\mathbf{M}_* \in \alpha'$ die Kreise $\mathcal{S} \cap \alpha'$ und $\mathcal{S}_* \cap \alpha'$ sich orthogonal schneiden.

Beweis. Es sei $\mathcal{S} \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Sphäre. Wenn $\mathbf{M}_* \in \mathcal{S}$ gilt, ist das Bild von $\mathcal{S}$ eine Ebene nach Satz (16.1).(b) und deswegen kann $\mathcal{S}$ nicht invariant sein. Es sei nun angenommen, dass $\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = \rho_*^2$. Aus (16.2) folgt es, dass $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$, also $I_*^+(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Es sei nun umgekehrt angenommen, dass $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$. Dann besitzen $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$ den gleichen Radius $\rho = \rho'$ und den gleichen Mittelpunkt $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$. Nach (16.2) haben wir,

$$\mathbf{M}' = \frac{\rho_*^2}{\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_*) + \mathbf{M}_*, \qquad \rho' = \frac{\rho_*^2}{|\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)|}\rho.$$

Also, wenn $\mathbf{M} \neq \mathbf{M}_*$, dann folgt es aus der ersten Gleichung, dass $\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = \rho_*^2$. Wenn $\mathbf{M} = \mathbf{M}_*$, dann $\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) < 0$ und aus der zweiten Gleichung folgt es nochmal, dass

$-\rho^2 = \mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = -\rho_*^2$. Das bedeutet, dass $\rho = \rho_*$ und deshalb $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_*$ gegen die Voraussetzung.

Wir beweisen nun die zweite Behauptung. Wenn $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$ müssen sich die Sphären $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}_*$ nach Eigenschaft 2 in der Vorlesung 15 schneiden. Es sei nun α eine 2-Ebene durch $\mathbf{M}_*$, die $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}_*$ in Kreisen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}_*$ schneidet. Es sei $\mathbf{x} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_*$. Wenn die Gerade durch $\mathbf{M}_*$ und $\mathbf{x}$ tangent an $\mathcal{C}$ ist, dann gilt nach dem Hilfsatz 13.7:

$$\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = \rho_*^2.$$

Wenn die Gerade durch $\mathbf{M}_*$ und $\mathbf{x}$ tangent an $\mathcal{C}$ ist, dann gibt es genau einen zusatzlichen Schnittpunkt $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}$ zwischen solcher Gerade und $\mathcal{C}$, der nicht auf $\mathcal{C}_*$ liegt. Also $|\mathbf{x}' - \mathbf{M}_*| \neq \rho_*$ und nach dem Hilfsatz 13.7:

$$|\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)| = \rho_* \cdot |\mathbf{x}' - \mathbf{M}_*| \neq \rho_* \cdot \rho_*. \qquad \square$$

Aufgabe 17.3. *Es sei $I_*^{\pm} : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Inversion und $\mathcal{S} \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Sphäre, die nicht radial bezüglich $\mathbf{M}_*$ ist. Beweisen Sie, dass $\mathcal{S}$ invariant durch I_*^+ ist, genau dann, wenn $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_*$. Beweisen Sie auch, dass $\mathcal{S}$ nicht invariant durch I_*^- sein kann.*

Aus dem Satz 17.1 und der Aufgabe 17.3 haben wir die folgende Charakterisierung der Hodographen mit Energie $h = -1/2$.

Folgerung 17.4. *Die Hodographen von Lösungen des keplerschen Problems mit $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ und $h = -1/2$ sind genau diejenigen radialen Kreise (bzg. $\mathbf{0}$) in $\mathbb{R}^3$, die invariant durch die negative Inversion an der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ sind.*

Um die geometrische Version des Satzes von Moser zu beweisen, reicht es nun zu zeigen, dass die negative Inversion an der Einheitssphäre $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und die antipodale Abbildung $A_* : S^{n-1} \to S^{n-1}$ durch die stereographische Projektion verknüpft sind.

Satz 17.5. *Wir haben das folgende kommutative Diagramm*

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "A_*"] \arrow[d, "\Psi"'] & S^{n-1}, \arrow[d, "\Psi"] \\ \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \arrow[r, "I_*^-"] & \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \end{tikzcd} \tag{17.1}$$

wobei $I_*^- : \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ die negative Inversion an der Einheitssphäre $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ist. Die Kommutativität bedeutet einfach, dass $\Psi \circ A_* = I_*^- \circ \Psi$.

Beweis. Es sei $\mathbf{x} \in S^{n-1}$. Wenn $\mathbf{x} = \mathbf{N}$, dann $\Psi \circ A_*(\mathbf{N}) = \Psi(\mathbf{S}) = \mathbf{0} = I_*^-(\infty) = I_*^-(\Psi(\mathbf{N}))$. Es sei nun angenommen, dass $\mathbf{x} \neq \mathbf{N}$. Der Winkel $\widehat{\mathbf{x}\mathbf{N}A_*(\mathbf{x})}$ is recht nach dem Satz von Thales. Also ist $\Delta(\Psi(\mathbf{x})\mathbf{N}\Psi(A_*(\mathbf{x}))$ ein rechtwinkliges Dreieck und $\mathbf{0}$ ist der Fußpunkt der Höhe auf der Hypothenuse. Wir haben deshalb

$$1^2 = |\Psi(\mathbf{x})| \cdot |\Psi(A_*(\mathbf{x}))|.$$

Da $\mathbf{0}$ auf der Strecke zwischen $\Psi(\mathbf{x})$ und $\Psi(A_*(\mathbf{x}))$ liegt, folgt es aus der Definition der negativen Inversion, dass $I_*^-(\Psi(\mathbf{x})) = \Psi(A_*(\mathbf{x}))$, wie gewünscht. $\square$

Beweis der ersten Aussage im Satz 14.1. Es sei $\mathcal{C}$ ein Kreis in S^3 und betrachten wir $\mathcal{C}' = \Psi(\mathcal{C})$. Wenn $\mathbf{N} \in \mathcal{C}$, dann ist $\mathcal{C}'$ eine Gerade in $\mathbb{R}^3$. Wenn $\mathbf{N} \notin \mathcal{C}$, dann ist $\mathcal{C}$ ein Kreis in $\mathbb{R}^3$. Nach Satz 17.5 ist $\mathcal{C}$ invariant durch A_* genau dann, wenn $\mathcal{C}'$ invariant durch I_*^- ist. Nach Satz 14.12 und der Folgerung 17.4 sehen wir, dass $\mathcal{C}$ ein Großkreis ist, genau dann wenn $\mathcal{C}'$ eine Gerade durch $\mathbf{0}$ ist (falls $\mathbf{N} \in \mathcal{C}$) oder $\mathcal{C}$ der Hodograph, von einer Lösung mit $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ und $h = -1/2$ ist. Da die Geraden durch $\mathbf{0}$ die Hodographe der Lösungen mit $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ und $h = -1/2$ sind, ist der Beweis vollständig. $\square$

Um die zweite Aussage in dem Satz von Moser zu beweisen, fangen wir an, eine Parametrisierung des Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ nach der exzentrischen Anomalie zu bestimmen.

Hilfsatz 17.6. *Es sei $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_\times$ eine (regularisierte) Lösung des keplerschen Problems mit Energie $h = -1/2$ und es sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ihre exzentrische Anomalie. Es gilt die Formel*

$$\mathbf{v}(u) = \frac{1}{1 - e\cos u}\Big(- e\sin u\, \mathbf{e}_1 + \sqrt{1-e^2}\cos u\, \mathbf{f}_1 \Big), \tag{17.2}$$

wobei $\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1 \in S^2$ mit $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1 \rangle = 0$. Wenn die Exzentrizität e im offenen Intervall $(0,1)$ liegt, dann gilt $\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{e}}$ und $\mathbf{f}_1 = \mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{e}}$. Wenn $e = 0$ aber $c \neq 0$ bilden $\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1, \hat{\mathbf{c}}$ eine positive orthonormale Basis.

Beweis. Nach der Kettenregel haben wir $\mathbf{v} = \dot{u}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}$. Wir leiten die Kepler-Gleichung (11.2) nach t ab, um $\dot{u}$ mit Hilfe von (9.9) zu finden:

$$\dot{u} = \frac{1}{1 - e\cos u}.$$

Der Term $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}$ gewinnen wir, indem wir die Formeln im Hilfsatz 10.7, bzw. im Satz 11.3 nach u ableiten. Die Multiplikation der zwei Termen gibt uns die gewünschte Formel für $\mathbf{v}(u)$. $\square$

Beweis der zweiten Aussage im Satz 14.1. Die Parametrisierung nach der Bogenlänge eines Großkreises $\gamma : \mathbb{R} \to S^3$ ist aus der Formel (14.1) zu lesen. Nach dem Satz 14.7 bekommen wir

$$\Psi(\gamma(u)) = \Psi\Big(- \sin u\, \mathbf{e}_1 + \sqrt{1-e^2}\cos u\, \mathbf{f}_1, e\cos u \Big) = \mathbf{v}(u),$$

wobei die zweite Gleichung aus den Hilfsatz 17.6 stammt. $\square$

18 Satz von Osipov-Belbruno für $h = 0$ 25.6.

Der Satz von Moser stellt eine Verbindung zwischen Bahnen mit negativer Energie und der sphärischen Geometrie, wo die Großkreise die selbe Rolle wie die Geraden in der euklidischen Geometrie spielen. Wir sehen nun, dass eine derartige Verbindung zwischen Bahnen mit Energie null und der euklidischen Geometrie besteht.

Satz 18.1 (Osipov-Belbruno; $h = 0$). *Die positive Inversion $I_*^+ : \bar{\mathbb{R}}^3 \to \bar{\mathbb{R}}^3$ an der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ gibt eine Bijektion zwischen den Hodographen $\mathbf{v}$ mit $h = 0$ un den Geraden in $\mathbb{R}^3$. Wenn $\mathbf{v}$ nach $w := u/\sqrt{\mu}$ parametrisiert ist, wobei u die exzentrische Anomalie darstellt, dann ist die Gerade nach der halben Bogenlänge parametrisiert.*

Beweis der ersten Aussage im Satz 18.1. Nach dem Satz 13.10 parametrisieren die Hodographe $\mathbf{v}$ mit $h = 0$ die Bogen $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}} = \mathcal{C}_\mathbf{r} \setminus \{\mathbf{0}\}$, wobei $\mathcal{C}_\mathbf{r}$ ein Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{M}_\mathbf{r} = \frac{\mu}{c}\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}$ und Radius $\rho_\mathbf{r} = \frac{\mu}{c}$, falls $c \neq 0$. Wenn $c = 0$, dann ist $\mathcal{C}_\mathbf{r} = \bar{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{e}$ die erweiterte Gerade durch $\mathbf{0}$ in Richtung $\mathbf{e}$. Aus die Formel 16.1 im Satz 16.1 ist das Bild von $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}}$ durch die Inversion, falls $c \neq 0$, die Gerade

$$I_*^+(\mathcal{B}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}}) = \mathbb{R} \cdot \mathbf{e} + \frac{c}{2\mu}\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}$$

und die Formel gilt auch für $c = 0$. Wenn $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{e} \in S^2$ mit $\langle \mathbf{c}, \mathbf{e} \rangle = 0$ beliebig sind, bekommen wir alle die möglichen Geraden des $\mathbb{R}^3$. Die Geraden durch $\mathbf{0}$ entsprechen genau den Hodographen mit $c = 0$. $\square$

Um die zweite Aussage in dem obigen Satz zu beweisen, müssen wir zuerst die exzentrische Anomalie definieren.

Es sei $\mathcal{P} \subset \alpha$ eine Parabel in einer Ebene $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ mit Exzentrizitätsvektor $\mathbf{e}$, Brennpunkt in $\mathbf{0}$ und Abstand d zwischen Brennpunkt und Leitlinie. Es sei $\mathcal{P}' \subset \alpha$ die Parabel mit Periapsis $\mathbf{r}_{\min}$ und Exzentrizitätsvektor $\mathbf{e}$ wie die von $\mathcal{P}$ aber mit Abstand 1 zwischen Brennpunkt und Leitlinie.

Definition 18.2. Wenn $\mathbf{r} \in \mathcal{P}$, definieren wir $\mathbf{s} \in \mathcal{P}'$ als der Punkt in $\mathcal{P}'$ dessen Lot auf der Gerade $\mathbb{R} \cdot \mathbf{e}$ die Parabel $\mathcal{P}$ im Punkt $\mathbf{r}$ schneidet. Die exzentrische Anomalie $u \in \mathbb{R}$ von $\mathbf{r}$ ist die Länge des Lots mit Vorzeichen.

Wir nehmen Koordinaten $(x, y) \mapsto x\mathbf{e} + y\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}$ auf α. Wenn $\mathbf{r} = (x, y)$, haben wir $\mathbf{s} = (x, u)$. Wir finden nun die Gleichungen für $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$ mit Hilfe vom Satz 8.1. Wir haben $x^2 + y^2 = (d - x)^2$, die wir als

$$x = \frac{d}{2} - \frac{1}{2d}y^2$$

umschreiben. Die Parabel $\mathcal{P}'$ hat Brennpunkt $(d/2-1/2, 0)$ und daher $(x+1/2-d/2)^2+u^2 = (1 - x - 1/2 + d/2)^2$. Wir multiplizieren aus und finden

$$x = \frac{d}{2} - \frac{1}{2}u^2.$$

Das heißt, dass die Streckung $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(x,y) = (x, y/\sqrt{d})$ die Parabel $\mathcal{P}$ auf die Parabel $\mathcal{P}'$ und den Punkt $\mathbf{r}$ auf den Punkt $\mathbf{s}$ bringt. Also, kommen wir zum folgenden Ergebnis.

Hilfsatz 18.3. *Der Punkt $\mathbf{r} \in \mathcal{P}$ lässt sich als Funktion der exzentrischen Anomalie auf folgender Weise ausdrücken:*

$$\mathbf{r} = \Big(\frac{d}{2} - \frac{1}{2}u^2\Big)\mathbf{e} + \sqrt{d}u\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}.$$

Wir können nun die Kepler-Gleichung für die exzentrische Anomalie beweisen.

Satz 18.4. *Es sei $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine regularisierte Lösung des keplerschen Problems mit $h = 0$. Wenn $u(t)$ die exzentrische Anomalie des Punktes $\mathbf{r}(t)$ ist, gilt*

$$\frac{u(t)^3}{6} + \frac{c^2}{2\mu}u(t) = \sqrt{\mu}(t - t_0), \tag{18.1}$$

wobei t_0 der Periapsisdurchgang darstellt.

Beweis. Wenn $c \neq 0$ beschreibt $\mathbf{r}$ eine Parabel $\mathcal{P}$ mit $d = c^2/\mu$ nach der Gleichung (9.5). Es sei $\Omega_{t_0,t}$ die von der Bahn im Zeitintervall $[t_0, t]$ überstrichene Region. Dann $\text{Area}(\Omega_{t_0,t}) = \frac{c}{2}(t - t_0)$ nach dem Satz 2.3. Außerdem gilt

$$\text{Area}(\sigma(\Omega_{t_0,t})) = \frac{\sqrt{\mu}}{c}\frac{c}{2}(t - t_0) = \frac{\sqrt{\mu}}{2}(t - t_0).$$

Aber die Region $\sigma(\Omega_{t_0,t})$ ist auch die disjunkte Vereinigung des Dreiecks $\Delta(\mathbf{r}_{\min}\mathbf{0}\mathbf{s})$ und des Parabelsektor von $\mathcal{P}'$ zwischen $\mathbf{r}_{\min}$ und $\mathbf{s}$. Das Dreieck hat Flächeinhalt $\frac{1}{2}\frac{d}{2}u(t)$ während das Sektor hat Flächeninhalt $\frac{u^3(t)}{12}$, wie folgt aus einer direkten Integrierung oder aus dem Parablesatz von Archimedes. Die Gleichung zwischen der Summe dieser Flächeninhälte und dem Flächeinhalt von $\sigma(\Omega_{t_0,t})$ ist genau die Gleichung in (18.1). □

Beweis der zweiten Aussage im Satz 18.1. Aus der Kepler-Gleichung gewinnen wir

$$\dot{u} = \frac{2\sqrt{\mu}}{u^2 + \frac{c^2}{\mu}}.$$

Die Kettenregel gibt uns

$$\mathbf{v} = \dot{u}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u} = \frac{2\sqrt{\mu}}{u^2 + \frac{c^2}{\mu}}\Big(- u\,\mathbf{e} + \frac{c}{\sqrt{\mu}}\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}\Big).$$

Wir haben $v^2 = 4\mu(u^2 + \frac{c^2}{\mu})^{-1}$, sodass, wenn $w = u/\sqrt{\mu}$,

$$I_*^+(\mathbf{v}(w)) = \frac{\mathbf{v}(w)}{v^2(w)} = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\Big(- u\,\mathbf{e} + \frac{c}{\sqrt{\mu}}\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}\Big) = \Big(- \frac{w}{2}\,\mathbf{e} + \frac{c}{2\mu}\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}\Big).$$

Das ist genau eine Parametrisierung der Gerade $\mathbb{R} \cdot \mathbf{e} + \frac{c}{2\mu}\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}$ mit Geschwindigkeit $1/2$. □

19 Satz von Osipov-Belbruno für $h = 1/2$ (Teil I) 28.6.

Wir diskutieren nun die Beziehung zwischen Bahnen mit positiver Energie und der hyperbolischen Geometrie. Wir verwenden dafür die folgende Schreibweise

$$\bar{\mathbb{R}}^{n-1}_1 := \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \setminus \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid v \leq 1\}.$$

Satz 19.1 (Osipov-Belbruno; $h = 1/2$)**.** *Die Einschränkung der stereographischen Projektion $\Psi_1 : \mathbb{H}^3 \to \bar{\mathbb{R}}^3_1$ auf dem hyperbolischen Raum gibt eine Bijektion zwischen den den Großhyperbeln in $\mathbb{H}^3$ und den Hodographen des keplerschen Problems mit $h = 1/2$. Wenn die Großhyperbeln nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrist ist, ist der Hodograph nach nach der exzentrischen Anomalie parametrisiert.*

Wir fangen an, den hyperbolischen Raum in beliebiger Dimension zu definieren.

Definition 19.2. Das Minkowski-Produkt $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist die symmetrische Bilinearform

$$M(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \rangle - z_1 z_2, \qquad \forall\, \mathbf{x}_1 = (\mathbf{y}_1, z_1),\ \mathbf{x}_2 = (\mathbf{y}_2, z_2) \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt für Vektoren des $\mathbb{R}^{n-1}$ ist. Für alle $r \in \mathbb{R}$ definieren wir die Teilmenge

$$\mathbb{H}^{n-1}_r := \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\big|\; M(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r\big\}$$

und setzen $\mathbb{H}^{n-1} := \mathbb{H}^{n-1}_{-1} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid z > 0\}$.

Aufgabe 19.3. *Machen Sie eine Skizze von $\mathbb{H}^{n-1}_r$ für beliebige r, wenn $n = 2$ und 3.*

Bemerkung 19.4. Ein Punkt $(\mathbf{y}, z)$ gehört zu $\mathbb{H}^{n-1}$ genau dann, wenn $z^2 - y^2 = 1$ und $z > 0$. Aus dieser Gleichung folgt es, dass $\mathbf{N} \in \mathbb{H}^{n-1}$ und dass $(\mathbf{y}, z) \in \mathbb{H}^{n-1}$ genau dann, wenn $(y, z) \in \mathbb{H}^1$. Außerdem, für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n-1}$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{N}$ gilt $z > 1$. Wir haben die Kette von Gleichungen

$$y < z \leq y + 1 \tag{19.1}$$

mit Gleichung genau dann, wenn $(\mathbf{y}, z) = \mathbf{N}$. Die erste Ungleichung folgt aus $z^2 - y^2 = 1 > 0$ und die zweite aus

$$1 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y) \geq (1 + 0)(z - y) = z - y, \qquad \forall\, (\mathbf{y}, z) \in \mathbb{H}^{n-1}.$$

Definition 19.5. Wir definieren die stereographische Projektion $\Psi_1 : \mathbb{H}^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}^{n-1}_1$ als

$$\Psi_1(\mathbf{x}) := \tilde{\Psi}(\mathbf{x}) = \mathbf{v} = \frac{1}{1 - z}\mathbf{y}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n-1} \setminus \{\mathbf{N}\}, \qquad \Psi_1(\mathbf{N}) := \infty.$$

Satz 19.6. *Die Abbildung $\Psi_1 : \mathbb{H}^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}^{n-1}_1$ ist ein wohl definierter Homöomorphismus dessen Umkehrabbildung $\Phi_1 : \bar{\mathbb{R}}^{n-1}_1 \to \mathbb{H}^{n-1}$ die folgende Formel besitzt*

$$\Phi_1(\infty) = \mathbf{N}, \qquad \Phi_1(\mathbf{v}) = \Big(\frac{2}{1 - v^2}\mathbf{v}, 1 - \frac{2}{1 - v^2}\Big), \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}_1.$$

Beweis. Wenn $\mathbf{v} = \Psi_1(\mathbf{x})$, dann gilt $v > 1$ aus (19.1). Die Stetigkeit von Ψ_1 folgt aus Aufgabe 13.12, weil

$$v = \frac{y}{z-1} = \frac{\sqrt{z^2-1}}{z-1} = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}.$$

Das Umkehrbild $\Phi_1(\mathbf{v})$ berechnen wir durch die Gleichungen

- $t(\mathbf{v}, 0) + (1-t)\mathbf{N} = \Phi_1(\mathbf{v}), \quad t < 0,$
- $M(\Phi_1(\mathbf{v}), \Phi_1(\mathbf{v})) = -1.$

Wir finden zuerst den Wert von t:

$$t^2v^2 - (1-t)^2 = -1, \quad t < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \frac{2}{1-v^2}.$$

Wir setzen t in die erste Gleichung und erhalten die Formel für $\Phi_1(\mathbf{v})$. Die Stetigkeit von Φ_1 folgt aus Aufgabe 13.12, da $\lim_{|\mathbf{v}|\to\infty} \Phi_1(\mathbf{v}) = \mathbf{N}$. □

Definition 19.7. Eine Großhyperbel ist die Schnittmenge zwischen $\mathbb{H}^{n-1}$ und eine 2-Ebene α durch $\mathbf{0}$.

Hilfsatz 19.8. *Wenn α die tragende Ebene einer Großhyperbel ist, gibt es $\mathbf{e}_1 \in S^{n-2}$ und $\mathbf{x} = (-\sqrt{e^2-1}\mathbf{f}_1, e) \in \mathbb{H}^{n-1}$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\alpha = \mathbb{R} \cdot (\mathbf{e}_1, 0) + \mathbb{R} \cdot \mathbf{x}, \qquad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1 \rangle = 0.$$

Der Punkt $\mathbf{x}$ und, bis auf Vorzeichen, der Vektor $\mathbf{e}_1$ sind eindeutig bestimmt von α. Wenn $\mathbf{x} \neq \mathbf{N}$ ist der Vektor $\mathbf{f}_1$ auch eindeutig.

Beweis. Die Ebene α darf nicht in $\{z = 0\}$ enthalten sein, da sie den hyperbolischen Raum schneidet. Daher gibt es bis auf Vorzeichen einen einzigen Vektor $\mathbf{e}_1 \in S^{n-2}$ mit $(\mathbf{e}_1, 0) \in \alpha$. Es sei nun $\mathbf{x}' \in \mathbb{H}^{n-1} \cap \alpha$. Wir nehmen $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' - M(\mathbf{x}', \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$, sodass $M(\mathbf{x}'', \mathbf{e}_1) = 0$. Wir berechnen $M(\mathbf{x}'', \mathbf{x}'') = -1 - M(\mathbf{x}', \mathbf{e}_1)^2$ und

$$\mathbf{x} := \frac{\mathbf{x}''}{\sqrt{1 + M(\mathbf{x}', \mathbf{e}_1)^2}}$$

ist der gewünschte Vektor. □

Wir bestimmen nun das Bild der Großhyperbeln durch die stereographische Projektion. Zu diesem Zweck definieren wir

$$K^{n-1} := \{\mathbf{x} = (\mathbf{w}, 1) \in \mathbb{R}^n \mid w < 1\}, \qquad S^{n-1}_+ := S^{n-1} \cap \{\mathbf{x} = (\mathbf{w}, z) \in \mathbb{R}^n \mid z > 0\}$$

und drei Abbildungen

$$F_1 : \mathbb{H}^{n-1} \to \mathbb{H}^{n-1}, \qquad G : \mathbb{H}^{n-1} \to K^{n-1}, \qquad P : K^{n-1} \to S^{n-1}_+,$$

wobei

$$F_1(\mathbf{y}, z) = (-\mathbf{y}, z), \qquad G(\mathbf{y}', z) = (\mathbf{y}'/z, 1), \qquad P(\mathbf{w}, 1) = (\mathbf{w}, \sqrt{1-w^2}).$$

Die Abbildung F_1 ist eine Drehung um einen glatten Winkel um die z-Achse. Die Abbildung G gibt der Schnittpunkt zwischen der Halbgerade $\mathbb{R}^+(\mathbf{y}', z)$ und der Scheibe K^{n-1}. Die Abbildung P ist die orthogonale Projektion in die z-Richtung auf die Hemisphäre S^{n-1}_+.

Aufgabe 19.9. *Beweisen Sie, dass G invertierbar ist mit Umkehrabbildung*

$$G^{-1}(\mathbf{w},1) = \Big(\frac{\mathbf{w}}{\sqrt{1-w^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\Big), \qquad \forall\,(\mathbf{w},1) \in K^{n-1}.$$

Satz 19.10. *Wir haben die Darstellung $\Psi_1 = \Psi \circ P \circ G \circ F_1$, wobei $\Psi : S_+^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}_1^{n-1}$ die Einschränkung der stereographischen Projektion ist.*

Beweis. Es sei $(\mathbf{y}, z) \in \mathbb{H}^{n-1}$. Wir berechnen

$$P \circ G \circ F_1\big(\mathbf{y}, z\big) = P \circ G\big(-\mathbf{y}, z\big) = P\Big(-\frac{\mathbf{y}}{z}, 1\Big) = \Big(-\frac{\mathbf{y}}{z}, \sqrt{1-\frac{y^2}{z^2}}\Big) = \Big(-\frac{\mathbf{y}}{z}, \frac{1}{z}\Big),$$

wo wir die Gleichung $y^2 - z^2 = -1$ benutzt haben. Schließlich gilt

$$\Psi\Big(-\frac{\mathbf{y}}{z}, \frac{1}{z}\Big) = -\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\frac{\mathbf{y}}{z} = \frac{\mathbf{y}}{1-z} = \Psi_1(\mathbf{y}, z). \qquad \square$$

20 Satz von Osipov-Belbruno für $h = 1/2$ (Teil II) 2.7.

Um die erste Aussage im Satz 19.1 zu beweisen, führen wir die folgende Klasse von Kreise auf S^{n-1} ein.

Definition 20.1. Ein Kreis $\mathcal{C} \subset S^{n-1}$ heißt vertikal, wenn $\mathcal{C} = \beta \cap S^{n-1}$, wobei β eine 2-Ebene ist, die eine Gerade mit Richtungsvektor $\mathbf{N}$ enthält. Ein vertikaler Halbkreis ist der Teil eines vertikalen Kreises, der in S^{n-1}_+ enthalten ist.

Aufgabe 20.2. *Beweisen Sie: die Ebene β eines vertikalen Kreises lässt sich als*

$$\beta = (\mathbf{w}, 1) + \mathbb{R} \cdot (\mathbf{e}_1, 0) + \mathbb{R} \cdot \mathbf{N}, \qquad \mathbf{w}, \mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad w < 1, \quad \mathbf{e}_1 \in S^{n-2}, \quad \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$$

schreiben. Außerdem, die Vektoren $\mathbf{w}$ und, bis auf Vorzeichen, $\mathbf{e}_1$ mit den obigen Eigenschaften werden von β eindeutig bestimmt.

Hilfsatz 20.3. *Die Abbildung $P \circ G \circ F_1 : \mathbb{H}^3 \to S^3_+$ gibt eine Bijektion zwischen der Menge der Großhyperbeln und der Menge der vertikalen Halbkreise.*

Beweis. Nach dem Hilfsatz 19.8 können wir die tragende Ebene einer Großhyperbel γ als

$$\alpha = \mathbb{R} \cdot (\mathbf{e}_1, 0) + \mathbb{R} \cdot \mathbf{x}$$

schreiben, wobei $\mathbf{e}_1 \in S^{n-2}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n-1}$ und $\langle \mathbf{y}, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$. Wir haben $F_1(\gamma) = F_1(\alpha) \cap \mathbb{H}^{n-1}$, wobei $F_1(\alpha) = \mathbb{R} \cdot (\mathbf{e}_1, 0) + \mathbb{R} \cdot F_1(\mathbf{x})$. Diese Ebene schneidet $\{z = 1\}$ in der Gerade

$$g = (\mathbf{w} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_1, 1) + \mathbf{N}, \qquad (\mathbf{w}, 1) = G \circ F_1(\mathbf{x}).$$

Das bedeutet, dass wir die Menge $P \circ G \circ F_1(\gamma)$ erhalten, indem wir die Hemisphäre S^{n-1}_+ mit der Ebene

$$\beta := (\mathbf{w}, 0) + \mathbb{R} \cdot (\mathbf{e}_1, 0) + \mathbb{R} \cdot \mathbf{N}$$

schneiden. Die Korrespondenz $\alpha \mapsto \beta$ ist eine Bijektion, denn die Paaren $(\mathbf{e}_1, \mathbf{x})$ und $(\mathbf{e}_1, \mathbf{w})$ bestimmen α bzw. β eindeutig und $(\mathbf{e}_1, \mathbf{x}) \mapsto (\mathbf{e}_1, \mathbf{w})$ ist eine Bijektion nach Aufgabe 19.9. $\square$

Definition 20.4. Wir definieren $F_2 : S^{n-1} \to S^{n-1}$ als die Spiegelung an der Hyperebene $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid z = 0\}$.

Aufgabe 20.5. *Schreiben Sie eine Formel für F_2 und beweisen Sie, dass $F_2 = F_1 \circ A_*$.*

Hilfsatz 20.6. *Die vertikalen Kreise sind diejenige Kreise auf S^{n-1}, die nicht in $\{z = 0\}$ enthalten sind und invariant durch die Abbildung F_2 sind.*

Beweis. Es sei angenommen, dass $\mathcal{C}$ ein Kreis auf S^{n-1} mit tragender Ebene β ist, der nicht in $\{z = 0\}$ enthalten ist. Wenn $(\mathbf{y}, z) \in \beta$ mit $z \neq 0$ und $F_2(\mathbf{y}, z) = (\mathbf{y}, -z) \in \beta$, dann liegt die Gerade $(\mathbf{y}, z) + \mathbb{R}(0, 2z)$ in β. Diese Gerade hat $\mathbf{N}$ als Richtungsvektor. Es sei umgekehrt angenommen, dass β vertikal ist. Mit Hilfe der Darstellung in Aufgabe 20.2 sieht man direkt, dass β und daher $\mathcal{C}$ invariant durch F_2 sind. $\square$

Hilfsatz 20.7. *Wir haben das kommutative Diagramm*

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "F_2"] \arrow[d, "\Psi"'] & S^{n-1} \arrow[d, "\Psi"] \\ \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \arrow[r, "I_*^+"] & \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \end{tikzcd}, \tag{20.1}$$

wobei $I_*^+ : \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ *die Inversion an der Einheitssphäre* $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *darstellt.*

Beweis. Wir beweisen zuerst, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "\Psi"'] & S^{n-1} \arrow[d, "\Psi"] \\ \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \arrow[r, "A_*"] & \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \end{tikzcd}, \tag{20.2}$$

wobei $A_* : \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ die antipodale Abbildung mit Zentrum $\mathbf{0}$ ist. In der Tat,

$$\Psi(F_1(\mathbf{y}, z)) = \Psi(-\mathbf{y}, z) = \frac{1}{1-z}(-\mathbf{y}) = -\frac{1}{1-z}\mathbf{y} = A_*\Big(\frac{1}{1-z}\mathbf{y}\Big) = A_*(\Psi(\mathbf{y}, z)).$$

Die Kommutativität des Diagramms in (20.1) folgt, wenn wir die Diagramme (17.1) und (20.2) nebeneinander setzen und benutzen, dass $F_1 \circ A_* = F_2$ und $A_* \circ I_*^- = I_*^+$:

$$\Psi \circ F_2 = \Psi \circ F_1 \circ A_* = A_* \circ \Psi \circ A_* = A_* \circ I_*^- \circ \Psi = I_*^+ \circ \Psi. \qquad \square$$

Folgerung 20.8. *Die stereographische Projektion* $\Psi : S_+^3 \to \bar{\mathbb{R}}_1^3$ *gibt eine Bijektion zwischen der Menge der vertikalen Halbkreise und der Menge der Hodographe mit Energie* $h = 1/2$.

Beweis. Wir erinnern uns an den Satz 17.2, der besagt, dass die Hodographe $\mathbf{v}$ mit Energie $h = 1/2$ die Bogen $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ parametrisieren, wobei $\mathcal{C}$ invariant durch I_*^+ aber nicht in S^2 enthalten ist. Die Behauptung folgt dann aus der Zusammenarbeit von Hilfsatz 20.6 und 20.7. □

Beweis der ersten Aussage im Satz 19.1. Die gewünschte Bijektion ist als Verkettung der Bijektion im Hilfsatz 20.3 und der in der folgerung 20.8 gegeben. □

21 Satz von Osipov-Belbruno für $h = 1/2$ (Teil III) 5.7.

21.1 Das hyperbolische Skalarprodukt

Definition 21.1. Es sei $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n-1}$. Der tangentiale Raum von $\mathbb{H}^{n-1}$ in $\mathbf{x}$ ist der Vektorraum

$$T_{\mathbf{x}}\mathbb{H}^{n-1} := \left\{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \mid M(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = 0\right\}.$$

Das hyperbolische Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle_{\mathbb{H}} : T_{\mathbf{x}}\mathbb{H}^{n-1} \times T_{\mathbf{x}}\mathbb{H}^{n-1} \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\langle \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \rangle_{\mathbb{H}} = M(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2), \qquad \forall\, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{H}^{n-1}.$$

Hilfsatz 21.2. *Für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n-1}$ ist $T_{\mathbf{x}}\mathbb{H}^{n-1}$ ein $(n-1)$-dimensionaler Unterversektorraum von $\mathbf{R}^n$ und das hyperbolische Skalarprodukt ist tatsächlich ein Skalarprodukt, das heißt*

$$\langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbb{H}} > 0, \qquad \forall\, \mathbf{h} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{H}^{n-1}, \quad \mathbf{h} \neq \mathbf{0}.$$

Beweis. Wenn $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, z)$, dann gehört $\mathbf{h} = (\mathbf{y}_1, z_1)$ zu $T_{\mathbf{x}}\mathbb{H}^{n-1}$ genau dann, wenn

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}_1 \rangle - z z_1 = 0$$

und die ist die Gleichung einer Hyperebene. Aus dieser Formel finden wir, dass

$$z_1 = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}_1 \rangle}{z}$$

und deshalb

$$M(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = y_1^2 - z_1^2 = y_1^2 - \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}_1 \rangle^2}{z^2} \geq y_1^2 - \frac{y^2 y_1^2}{z^2} = \frac{y_1^2}{z^2}$$

und der letzte Term ist positiv, wenn $\mathbf{h} \neq 0$, wobei wir die Cauchy-Schwarz Ungleichung benutzt haben. □

Nach diesem Hilfsatz definieren wir die hyperbolische Norm von $\mathbf{h} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{H}^{n-1}$ als

$$|\mathbf{h}|_{\mathbb{H}} := \sqrt{\langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbb{H}}}.$$

Hilfsatz 21.3. *Es sei $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Wenn $\mathbf{x}(I) \subset \mathbb{H}^{n-1}$, dann gehört der Vektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ zum Tangentialraum $T_{\mathbf{x}(t)}\mathbb{H}^{n-1}$ von $\mathbb{H}^{n-1}$ in $\mathbf{x}(t)$ für jede $t \in I$.*

Beweis. Wenn $\mathbf{x}(I) \subset \mathbb{H}^{n-1}$ haben wir $M(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t)) \equiv -1$. Wir leiten diese Gleichung nach t ab und benutzen die Bilinearität und Symmetrie von M, um die Behauptung zu beweisen. □

Definition 21.4. Eine Kurve $\mathbf{x} : I \to \mathbb{H}^{n-1}$ ist nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrisiert, genau dann, wenn $|\dot{\mathbf{x}}(t)|_{\mathbb{H}^{n-1}} = 1$ für alle $t \in I$.

Hilfsatz 21.5. *Es sei* $\mathbb{H}^{n-1} \cap \alpha$ *eine Großhyperbel, wobei*

$$\alpha = \mathbb{R} \cdot (\mathbf{e}_1, 0) + \mathbb{R} \cdot \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} := (-\sqrt{e^2-1}\mathbf{f}_1, e), \quad \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1 \in S^{n-2}, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1 \rangle = 0.$$

Die Kurve $\gamma_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^{n-1}$*, wobei für alle* $u \in \mathbb{R}$

$$\gamma_\alpha(u) := \cosh u\, \mathbf{x} + \sinh u\, \mathbf{e}_1 = \big(\sinh u\, \mathbf{e}_1 - \sqrt{e^2-1}\cosh u\, \mathbf{f}_1, e\cosh u\big),$$

ist eine Parametrisierung nach der hyperbolischen Bogenlänge der gegebenen Großhyperbel.

Beweis. Das Resultat folgt direkt aus der Tatsache, dass $\mathbf{e}_1 \in S^{n-2}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n-1}$ und $M(\mathbf{x}, (\mathbf{e}_1, 0)) = 0$. □

21.2 Die exzentrische Anomalie für $h > 0$

Es sei $\mathcal{H} \subset \alpha$ ein Ast einer Hyperbel in einer Ebene $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ mit Exzentrizitätsvektor $\mathbf{e}$, Brennpunkt in $\mathbf{0}$ und reellen Halbachse a. Wir schreiben $\mathbf{M} \in \alpha$ für den Schnittpunkt zwischen den zwei Asymptoten von $\mathcal{H}$. Es sei $\mathcal{H}' \subset \alpha$ der Ast der Hyperbel mit

$$e = \sqrt{2}, \qquad \hat{\mathbf{e}}' = \hat{\mathbf{e}}, \qquad \mathbf{r}'_{\min} = \mathbf{r}_{\min}, \qquad a' = a.$$

Es folgt daraus, dass $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$ und wir können den Ast $\mathcal{H}'$ bijektiv parametrisieren als

$$\mathbf{s}(u) = \mathbf{M} + a(-\cosh u)\hat{\mathbf{e}} + a(\sinh u)\mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{e}}, \qquad u \in \mathbb{R}. \tag{21.1}$$

Definition 21.6. Wenn $\mathbf{r} \in \mathcal{H}$, definieren wir $\mathbf{s} \in \mathcal{H}'$ als der Punkt in $\mathcal{H}'$ dessen Lot auf der Gerade $\mathbb{R} \cdot \mathbf{e}$ die Hyperbel $\mathcal{H}$ im Punkt $\mathbf{r}$ schneidet. Die exzentrische Anomalie von $\mathbf{r}$ ist die einzige $u \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{s} = \mathbf{s}(u)$, wobei die rechte Seite von (21.1) gegeben ist.

Wir geben nun die Darstellung von $\mathbf{r}$ als Funktion von u und die Kepler-Gleichung für u ohne Beweis.

Satz 21.7. *Der Punkt* $\mathbf{r} \in \mathcal{P}$ *lässt sich als Funktion der exzentrischen Anomalie auf folgender Weise ausdrücken:*

$$\mathbf{r} = a\big(e - \cosh u\big)\hat{\mathbf{e}} + a\sqrt{e^2-1}\sinh u\, \mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{e}}.$$

Diese Formel gilt auch für die entartete Hyperbel mit $e = 1$*. Wenn* $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *eine regularisierte Lösung des keplerschen Problems mit* $h > 0$ *und* $u(t)$ *die exzentrische Anomalie des Punktes* $\mathbf{r}(t)$ *ist, gilt*

$$e \sinh u(t) - u(t) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0), \tag{21.2}$$

wobei t_0 *den Periapsisdurchgang darstellt. Es folgt, daraus, dass die Parametrisierung nach der exzentrischen Anomalie eines Hodographs* $\mathbf{v}$ *mit* $h = 1/2$ *durch die Formel*

$$\mathbf{v}(u) = \frac{1}{1 - e\cosh u}\Big(\sinh u\, \hat{\mathbf{e}} - \sqrt{e^2-1}\cosh u\, \mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{e}}\Big)$$

gegeben ist. □

Beweis der zweiten Aussage im Satz 19.1. Es sei $\gamma_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^{n-1}$ eine Großhyperbel, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Nach dem Hilfsatz 21.5 haben wir

$$\gamma_\alpha(u) := \big(\sinh u\,\mathbf{e}_1 - \sqrt{e^2-1}\cosh u\,\mathbf{f}_1, e\cosh u\big).$$

Hier $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, e)$ und $\mathbf{y} = -\sqrt{e^2-1}\mathbf{f}_1$. Wir berechnen dann nach der Definition 19.5

$$\Psi_1(\gamma_\alpha(u)) = \frac{1}{1-e\cosh u}\Big(\sinh u\,\mathbf{e}_1 - \sqrt{e^2-1}\cosh u\,\mathbf{f}_1\Big) = \mathbf{v}(u),$$

wobei die entsprechende Lösung den Exzentrizitätsvektor und den Drehimpuls

$$\mathbf{e} := e\,\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{c} := \sqrt{e^2-1}\,\mathbf{e}_1 \times \mathbf{f}_1 = \mathbf{y} \times \mathbf{e}_1$$

besitzt. $\square$

22 Das n-Körperproblem 9.7.

22.1 Der allgemeine Fall

Wir betrachten nun n-Körper $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ im 3-dimensionalen euklidischen Raum mit positiven Massen $m_1, \ldots, m_n$, die sich unter der Wirkung der gegenseitigen Gravitationskraft bewegen. Also, wir haben das folgende System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die wir *(gravitationales) n-Körperproblem* nennen,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} -\frac{G m_i m_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{22.1}$$

wobei G die universelle Gravitationskonstante und m_j die Masse von $\mathbf{r}_j$ sind und wir die Notation

$$\mathbf{r}_{ij} := \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \qquad r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$$

benutzt haben. Wir bemerken, dass $\mathbf{r}_{ij} = -\mathbf{r}_{ji}$ und deshalb $r_{ij} = r_{ji}$. Unser System wird wohldefiniert sein, wenn die Körper verschiedene Lagen im Raum besetzen. Das heißt, dass der Gesamtvektor $\mathbf{r} := (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ zum Komplement der dicken Diagonale gehört:

$$\Delta^c := \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta, \qquad \Delta := \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n} \;\middle|\; \exists\, i \neq j, \ \ \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j \right\}.$$

Aufgabe 22.1. *Wie kann man die kompakten Mengen von Δ^c charakterisieren?*

Wir benutzen die folgende Notation für den Gradient einer Funktion $u : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$:

$$\operatorname{grad} u = (\operatorname{grad}_1 u, \cdots, \operatorname{grad}_n u), \qquad \operatorname{grad}_i u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial y_i}, \frac{\partial u}{\partial z_i} \right) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n,$$

wobei $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$.

Aufgabe 22.2. *Es seien $i \neq j$ und betrachte man die Funktion $r_{ij} : \Delta^c \to \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass für alle $\ell = 1, \ldots, n$*

$$\operatorname{grad}_\ell r_{ij} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \textit{wenn } \ell \neq i, j; \\ \hat{\mathbf{r}}_{ij}, & \textit{wenn } \ell = i; \\ \hat{\mathbf{r}}_{ji}, & \textit{wenn } \ell = j. \end{cases} \tag{22.2}$$

22.2 Das eingeschränkte n-Körperproblem

Wenn wir beide Seiten der Gleichung (22.1) durch m_i teilen, bekommen wir

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} -\frac{G m_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}. \tag{22.3}$$

Diese Gleichung hat physikalische Bedeutung auch wenn einige der Massen, zum Beispiel $m_{n'+1}, \dots, m_n$, die wir *Satelliten* nennen, viel kleiner als der Massen $m_1, \dots, m_{n'}$, die wir *Primärkörper* nennen, sind. In diesem Fall können wir in (22.3) $m_{n'+1} = \dots = m_n = 0$ setzen. Dann beinflusst ein Satellit die Bewegung eines anderen Satellites oder eines Primärkörpers nicht. Also lösen die Primärkörper das n'-Körperproblem

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} -\frac{G m_i m_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}, \qquad i = 1, \dots, n', \tag{22.4}$$

während jeder Satellit $\mathbf{r}_i$ die Gleichung

$$\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}_i(t)), \qquad \mathbf{F}(t, \mathbf{r}_i) := -\sum_{j=1}^{n'} \frac{G m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j(t)|^2} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j(t)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j(t)|} \tag{22.5}$$

löst. In (22.5) werden die Bahnen $t \mapsto \mathbf{r}_j(t)$ für $j = 1, \dots, n'$ als bekannten betrachtet und deshalb ist solche Gleichung *nicht autonom*, weil ihre rechte Seite explizit von der Zeit t abhängt. Die Formel für die Kraft $\mathbf{F}$ auf $\mathbf{r}_i$ hängt nur von den Primärkörpern und nicht von i ab. Deswegen ist es genug den Fall $n' = n - 1$ (d.h. , es gibt nur einen Satelliten) zu betrachten. Dieser Fall ist der sogenannte *eingeschränkte n-Körperproblem*, wobei oft zusätzliche Bedingungen auf der Bewegung der $n - 1$ Primärkörper verlangt werden.

Also, unser Ziel wird das System (22.1) von Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu behandeln. Dafür werden wir aus diesem System eine einzige Differentialgleichung in einem höheren dimensionalen Raum gewinnen und dann auf die Theorie, die wir in Vorlesung 3 und 4 entwickelt haben, zurückgreifen.

22.3 Konservative Systeme

Wir betrachten nur Systeme zweiter Ordnung der Art

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n) \\ \qquad \dots \\ m_n \ddot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n) \end{cases}$$

ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wobei $m_i \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{r}_i : I \to \mathbb{R}^k$ Vektorfunktionen und $\mathbf{F}_i : \mathscr{R} \times (\mathbb{R}^k)^n \to \mathbb{R}^k$ die Kräfte sind und $\mathscr{R}$ eine offene Teilmenge des $(\mathbb{R}^k)^n$ ist. Die Kurven $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n : I \to \mathbb{R}^d$ lösen dieses Gleichungssystem genau dann, wenn $\mathbf{r} := (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) : I \to \Omega$ die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung löst:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \tag{22.6}$$

wobei die Trägheit und die Kraft definiert als

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} m_1 \mathbf{I}_3 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & m_n \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) := \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \end{pmatrix}. \tag{22.7}$$

sind. Wir definieren die kinetische Energie des Systems $T : \mathbb{R}^{3n} \to [0, +\infty]$ als

$$T(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2_{\mathbf{M}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Wir möchten nun das System (22.1) untersuchen durch das Studieren von allgemeineren Systemen der Art

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) := -\sum_{j \neq i} \nu_{ij} f(r_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij}, \tag{22.8}$$

wobei ν_{ij} die Einträge einer symmetrischer Matrix $\nu \in S(n)$ sind und $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ irgendwelche Funktion ist. Für (22.1) haben wir $\nu_{ij} = m_i m_j$ und $f(r) = G/r^2$.

Definition 22.3. Der lineare Impuls des Systemes ist

$$\mathbf{p} := \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i$$

und der Schwerpunkt des Systemes ist

$$\mathbf{r}_S := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i,$$

wobei $m := m_1 + \ldots + m_n$ die gesamte Masse des Systemes ist.

Hilfsatz 22.4. *Der lineare Impuls ist ein erstes Integral für* (22.8). *Deshalb gibt es* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ *mit*

$$\mathbf{r}_S = t\,\frac{\mathbf{p}}{m} + \mathbf{q}.$$

Beweis. Wir berechnen

$$\dot{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{v}}_i = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \nu_{ij} f(r_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij} = -\sum_{i<j} \nu_{ij} f(r_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij} - \sum_{j<i} \nu_{ij} f(r_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij} \tag{22.9}$$

Wenn wir die Namen der Indizen umtauschen, gewinnen wir

$$\sum_{j<i} \nu_{ij} f(r_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij} = \sum_{i<j} \nu_{ji} f(r_{ji}) \hat{\mathbf{r}}_{ji} = \sum_{i<j} \nu_{ij} f(r_{ij}) (-\hat{\mathbf{r}}_{ij}) = -\sum_{i<j} \nu_{ij} f(r_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij}.$$

Also die zwei Summen in (22.9) kürzen sich ab und die Aussage ist bewiesen. □

Es seien nun $\mathbf{r}_i$ Lösungen von (22.8). Wir führen Kurven $\tilde{\mathbf{r}}_i := \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S$ ein, sodass

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \qquad \tilde{\mathbf{r}}_S = \mathbf{q}.$$

Wir werden auch das Koordinatensystem wählen, sodass $\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Also $\tilde{\mathbf{r}}_S = \mathbf{0}$. Da $\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$, $\ddot{\tilde{\mathbf{r}}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i$ und $\tilde{\mathbf{r}}_{ij} = \mathbf{r}_{ij}$, lösen die neuen Kurven immer noch das System (22.8).

22.4 Anwendung zum Zweikörperproblem

Wir nehmen $n = 2$ in (22.1). Nach der obigen Diskussion können wir annehmen, dass $m\mathbf{r}_S = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$. Es folgt daraus, dass

$$\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{r}_1, \qquad \mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{r}_2, \tag{22.10}$$

also $\mathbf{r}_1$ liegt zu jeder Zeit auf der anderen Seite von $\mathbf{r}_2$ bezüglich dem Schwerpunkt $\mathbf{r}_S = \mathbf{0}$ und $r_2/r_1 = m_1/m_2$, das heißt, dass das schwerere Körper näher zum Schwerpunkt ist. Wir finden also $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \frac{m}{m_2}\mathbf{r}_1 = -\frac{m}{m_1}\mathbf{r}_2$. Mit Hilfe dieser Formel ist das Zweikörperproblem äquivalent zu

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -G\frac{m_2^3}{m^2}\frac{1}{r_1^2}\hat{\mathbf{r}}_1, \qquad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G\frac{m_1^3}{m^2}\frac{1}{r_2^2}\hat{\mathbf{r}}_2. \tag{22.11}$$

Also jeder Körper ist eine Lösung des keplerschen Problems mit Konstanten Gm_2^3/m^2 und Gm_1^3/m^2. Jede Lösung bestimmt die andere durch die Formel (22.10). Die Kurven $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ liegen auf der gleichen Ebene oder gleichen Gerade, wenn $\mathbf{c} = 0$, und beschreiben die selbe Art von Kegelschnitt.

Aufgabe 22.5. *Es sei angenommen, dass $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ Ellipsen beschreiben, die sich in einem Punkt berühren. Finden Sie das Verhältnis der Massen der zwei Körper als Funktion der Exzentrizität e. Wie schwerer muss der erste Körper als der zweite sein, wenn $e = 1/2$?*

Aufgabe 22.6. *Beweisen Sie das dritte Keplergesetz für zwei Körper mit Summe der Massen gleich m und Abstand gleich a, die sich in Kreisbahnen bewegen. Leiten Sie eine ähnliche Formel, wenn die Körper sich in elliptischen Bahnen bewegen und der minimale und maximale Abstand zwischen der Körper sind $a_{\min}$ und $a_{\max}$.*

Aufgabe 22.7. *Es sei $\mathbf{r}_1$ die Sonne und $\mathbf{r}_2$ die Erde. Wir möchten nun r_1, das heißt den Abstand zwischen der Sonne und dem Schwerpunkt des Zweikörpersystems, berechnen mit Hilfe der Formel $r_1 = (Gm_2)r_2/(Gm_1)$. Wir nehmen an, dass die Bahnen Kreis sind.*

Die Masse der Erde mal die Gravitationskonstante lässt sich mit einfachen Experimenten berechnen. Man findet $Gm_2 = 4 \cdot 10^{14} m^3/s^2$. Der Abstand r_2 zwischen der Erde und der Sonne ist $r_2 = 1,5 \cdot 10^{11} m$. Diese Größe ist praktisch in zwei Schritte bestimmt. Erstmal betrachtet man ein weiteres Planet $\mathbf{r}_3$ (zum Beispiel Mars) und findet man den relativen Abstand durch das dritte keplersche Gesetz $r_2/r_3 = (p_2/p_3)^{2/3}$, wobei p_2 und p_3 die Periode der Planeten sind. Dann berechnet man r_3 mit Hilfe der Parallaxe. Der erste Wissenschaftler, der 1672 eine befriedigende Vermessung von r_3 erhielt, war Giovanni Domenico Cassini. Da m_1 viel größer als m_2 ist, haben wir $Gm_1^3/m^2 \sim Gm_1$. Daher lässt sich die zweite Gleichung in (22.11) durch die Gleichung $\ddot{\mathbf{r}}_2 = -Gm_1\frac{1}{r_2}\hat{\mathbf{r}}_2$ approximieren. Da die Revolutionszeit der Erde um die Sonne bekannt ist, können wir mit Hilfe des dritten keplerschen Gesetzes finden

$$Gm_1 = \frac{4\pi^2 \cdot r_2^3}{p_2^2} = \frac{4\pi^2(1,5)^3 \cdot 10^{33}}{(3 \cdot 10^7)^2} m^3/s^2 = 1,5 \cdot 10^{20} m^3/s^2.$$

Also ergibt es sich $r_1 = 4 \cdot 10^5 m = 400\, km = \frac{6}{1000}$ Radius der Sonne.

23 Erste Integrale des n-Körperproblem 12.7

Definition 23.1. Es seien $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ Körper mit konstantem Schwerpunkt $\mathbf{r}_S \equiv \mathbf{0}$. Der Drehimpuls eines Systems (um seinen Schwerpunkt) ist

$$\mathbf{c} := \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i.$$

Hilfsatz 23.2. *Der Drehimpuls ist ein erstes Integral für* (22.8).

Beweis. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{c}} = \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{v}}_i) &= -\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i} \nu_{ij} f(r_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \nu_{ij} f(r_{ij}) \mathbf{r}_i \times \hat{\mathbf{r}}_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \frac{\nu_{ij} f(r_{ij})}{r_{ij}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \\
&= \sum_{i<j} \frac{\nu_{ij} f(r_{ij})}{r_{ij}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j + \sum_{j<i} \frac{\nu_{ij} f(r_{ij})}{r_{ij}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j
\end{aligned}$$

Wenn wir die Namen der Indizen umtauschen, gewinnen wir

$$\sum_{j<i} \frac{\nu_{ij} f(r_{ij})}{r_{ij}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = \sum_{i<j} \frac{\nu_{ji} f(r_{ji})}{r_{ji}} \mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_i = -\sum_{i<j} \frac{\nu_{ij} f(r_{ij})}{r_{ij}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j. \qquad \square$$

Es sei $\tilde{U} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion für f und es sei $U_{ij} := \nu_{ij} \tilde{U} \circ r_{ij} : \Delta^c \to \mathbb{R}$ für alle $i \neq j$. Die potentielle Energie des Systems ist

$$U : \Delta^c \to \mathbb{R}, \qquad U(\mathbf{r}) := \sum_{i<j} U_{ij}.$$

Aufgabe 23.3. *Zeigen Sie, dass das Gravitationspotential aus der Gleichung* (22.1) *die Gestalt $\tilde{U}(r) = -G/r$ besitzt, sodass*

$$U(\mathbf{r}) = -\sum_{i<j} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Hilfsatz 23.4. *Wir haben* $\operatorname{grad} U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(\mathbf{r})$. *Insbesondere ist die Kraft* $\mathbf{F}$ *konservativ und die Energie*

$$E : \Delta^c \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}, \qquad E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) := T(\mathbf{v}) + U(\mathbf{r})$$

stellt ein erstes Integral dar.

Beweis. Wir haben $\operatorname{grad} U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(\mathbf{r})$ genau dann, wenn $\operatorname{grad}_\ell U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}_\ell(\mathbf{r})$ für alle $\ell = 1, \ldots, n$. Wir berechnen mit Hilfe der Formel (22.2)

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}_\ell U = \sum_{i<j} \nu_{ij} \operatorname{grad}_\ell (\tilde{U} \circ r_{ij}) = \sum_{i<j} \nu_{ij} f(r_{ij}) \operatorname{grad}_\ell r_{ij} &= \sum_{\ell<j} \nu_{\ell j} f(r_{\ell j}) \hat{r}_{\ell j} + \sum_{i<\ell} \nu_{i\ell} f(r_{i\ell}) \hat{r}_{\ell i} \\
&= \sum_{\ell<j} \nu_{\ell j} f(r_{\ell j}) \hat{r}_{\ell j} + \sum_{j<\ell} \nu_{\ell j} f(r_{\ell j}) \hat{r}_{\ell j} \\
&= \sum_{j \neq \ell} \nu_{\ell j} f(r_{\ell j}) \hat{r}_{\ell j} \\
&= -\mathbf{F}_\ell(\mathbf{r}).
\end{aligned}$$ □

Aufgabe 23.5. *Es sei* $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ *eine Lösung des zwei Körpersproblems mit Energie* h *und Drehimpuls* $\mathbf{c}$*. Es seien* $h_1, \mathbf{c}_1$ *und* $h_2, \mathbf{c}_2$ *die Energien und die Drehimpulsen von* $\mathbf{r}_1$ *und* $\mathbf{r}_2$*, als Lösungen der zwei keplerschen Probleme in* (22.11)*. Zeigen Sie, dass*

$$h_1 = \frac{m_2^2}{m_1^2 + m_2^2} h, \qquad h_2 = \frac{m_1^2}{m_1^2 + m_2^2} h, \qquad h = h_1 + h_2$$

$$\mathbf{c}_1 = \frac{m_2}{m} \mathbf{c}, \qquad \mathbf{c}_2 = \frac{m_1}{m} \mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$$

Satz 23.6. *Es sei* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *und es sei angenommen, dass*

$$\liminf_{r \to +\infty} \tilde{U}(r) > -\infty.$$

Es sei $\mathbf{r} : [0, t_\infty) \to \Delta^c$ *eine maximale Lösung von* (22.8)*, wobei* $t_\infty \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$*. Man definiere für alle* $t \in [0, t_\infty)$ *die positive Zahl*

$$\rho(t) = \min\{r_{ij}(t) \mid i \neq j\}.$$

Wenn $t_\infty < +\infty$*, dann*

$$\lim_{t \to t_\infty} \rho(t) = 0.$$

Beweis. Für alle $\epsilon > 0$ betrachten wir die Mengen $M_\epsilon \subset \Delta^c$

$$M_\epsilon := \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n} \;\middle|\; \forall\, i \neq j,\ r_{ij} \geq \epsilon \right\}.$$

Wir zeigen nun, dass es für alle $\epsilon > 0$ und $h \in \mathbb{R}$ ein $t_{\epsilon,h} > 0$ existiert, sodass, wenn $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in (M_\epsilon \times \mathbb{R}^{3n}) \cap E^{-1}(h)$ und $\mathbf{r} : [0, t_1) \to \Delta^c$ die maximale Lösung mit $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ und $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0$ ist, haben wir die Abschätzung $t_1 \geq t_{\epsilon,h}$. Es sei $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in (M_\epsilon \times \mathbb{R}^{3n}) \cap E^{-1}(h)$. Wenn $\mathbf{r} \in \bar{B}_{\epsilon/4}(\mathbf{r}_0)$, dann $|\mathbf{r}_i - (\mathbf{r}_i)_0| \leq \epsilon/4$ für alle i und

$$r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \geq |(\mathbf{r}_i)_0 - (\mathbf{r}_j)_0| - |\mathbf{r}_i - (\mathbf{r}_i)_0| - |(\mathbf{r}_j)_0 - \mathbf{r}_j| \geq \epsilon - \epsilon/4 - \epsilon/4 = \epsilon/2.$$

Wir haben also gezeigt, dass $\bar{B}_{\epsilon/4}(\mathbf{r}_0) \subset M_{\epsilon/2}$. Nach Satz 4.7 gilt

$$t_1 \geq \sqrt{\frac{\lambda_{\mathbf{M}}}{2}} \frac{\epsilon/4}{\sqrt{h - \min_{\bar{B}_{\epsilon/4}(\mathbf{r}_0)} U}} \geq \sqrt{\frac{\lambda_{\mathbf{M}}}{2}} \frac{\epsilon/4}{\sqrt{h - \min_{M_{\epsilon/2}} U}}.$$

Also wir müssen U auf $M_{\epsilon'}$ mit $\epsilon' = \epsilon/2$ nach unten beschränken. Nach Voraussettzung gibt es $C_{\epsilon'} > 0$ mit der Eigenschaft, dass $\tilde{U}(r) \geq -C_{\epsilon'}$ für alle $r \geq \epsilon'$. Für $\mathbf{r} \in M_{\epsilon'}$ gilt $r_{ij} \geq \epsilon'$ und daher

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{i<j} \nu_{ij} \tilde{U}(r_{ij}) \geq \sum_{i<j} -|\nu_{ij}| C_{\epsilon'}.$$

Schließlich

$$t_1 \geq \sqrt{\frac{\lambda_{\mathbf{M}}}{2}} \frac{\epsilon/4}{\sqrt{h + C_{\epsilon'} \sum_{i<j} |\nu_{ij}|}}.$$ □

Folgerung 23.7. *Wenn* $\mathbf{r} : [0, t_\infty) \to \Delta^c$ *eine maximale Lösung des gravitationellen n-Körperproblems* (22.1) *mit* $t_\infty < +\infty$ *ist, dann* $\rho(t) \to 0$ *für* $t \to t_\infty$. □

Der obige Satz sagt, dass wenn die maximale Lösung nicht für alle Zeite definiert ist, dann der Abstand zwischen zwei der Körper gegen null konvergiert. Wenn $n = 2$ wissen wir, dass die Körper kollidieren.

Wir werden sehen, dass genau so für $n = 3$ passiert. Aus dem Satz von Sundman wird auch folgen, dass wenn alle drei Körper miteinander Kollidieren, dann muss der Drehimpuls verschwinden. Das heißt, dass für das 3-Körperproblem mit nicht verschwindendem Drehimpuls die Körper nur paarweise kollidieren kann. In diesem Fall können wir die Lösung regularisieren und fortsetzen, wie wir für das Keplerproblem gemacht haben.

Schließlich, wenn $n > 3$, ist die Situation ziemlich komplizierter, denn zwei Körper gegen unendlich können laufen und gleichzeitig näher und näher zueinander kommen in endlicher Zeit t_∞.

24 Kollisionen in dem n-Körperproblem 16.7.

Wir betrachten nun eine Gleichung der Art $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\operatorname{grad} U(\mathbf{r})$, wobei $U : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$, $\mathscr{R}$ ein verallgemeinerter Kegel und U eine p-homogene Funktion.

Definition 24.1. Eine Menge $\mathscr{R} \subset \mathbb{R}^d$ heißt verallgemeinerter Kegel, wenn

$$\mathbf{r} \in \mathscr{R} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+, \ \ \lambda\mathbf{r} \in \mathscr{R}.$$

Es sei $p \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $U : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ auf einem verallgemeinerten Kegel heißt p-homogen, wenn

$$U(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^p U(\mathbf{r}), \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+, \ \mathbf{r} \in \mathscr{R}.$$

Aufgabe 24.2. *Zeigen Sie, dass die Menge Δ^c ein verallgemeinerter Kegel ist. Wenn die Funktion $\tilde{U} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ p-homogen ist, ist auch das Potential U p-homogen. Zeigen Sie, dass $\tilde{U} \neq 0$ p-homogen ist, genau dann, wenn es $\tilde{U}_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit*

$$\tilde{U}(r) = \tilde{U}_1 r^p, \qquad \forall\, r \in \mathbb{R}^+.$$

Dieses Potential genügt der Bedingung $\liminf_{r \to +\infty} \tilde{U}(r) > -\infty$ *vom Satz* 23.6 *genau dann, wenn $p\tilde{U}_1 \geq 0$. Das Potential $\tilde{U}(r) = -G/r$ ist homogen mit $p = -1$ und $\tilde{U}_1 = -G$.*

Hilfsatz 24.3. *Es sei $U : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ eine p-homogene Funktion auf einem offenen verallgemeinerten Kegel. Dann, für alle $\mathbf{r} \in \mathscr{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}^+$ gilt*

$$\operatorname{grad} U(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^{p-1} \operatorname{grad} U(\mathbf{r}), \qquad \langle \operatorname{grad} U(\mathbf{r}), \mathbf{r} \rangle = p\, U(\mathbf{r}). \tag{24.1}$$

Beweis. Die zwei Identitäten folgen unmittelbar, wenn wir $U(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^p U(\mathbf{r})$ nach $\mathbf{r}$ beziungsweise nach λ (und $\lambda = 1$ einsetzen) ableiten. □

Folgerung 24.4. *Es sei $U : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ eine p-homogene Funktion auf einem offenen verallgemeinerten Kegel mit $p \neq 0$ und $U(\mathbf{r}) \neq 0$ für alle $\mathbf{r} \in \mathscr{R}$. Dann ist der Gradient von U nirgends null und die Gleichung $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\operatorname{grad} U$ keine konstante Lösung besitzt. Insbesondere besitzt das n-Körperproblem* (22.1) *keine konstante Lösung.*

caption. Wenn der Gradient im Punkt $\mathbf{r}$ gleich Null wäre, hätten wir $0 = \langle \operatorname{grad} U(\mathbf{r}), \mathbf{r} \rangle = pU(\mathbf{r})$. Also einer zwischen p und $U(\mathbf{r})$ wäre Null. Die Korrespondenz zwischen kritischen Punkten von U und konstanten Lösungen von $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} = -\operatorname{grad} U(\mathbf{r})$ war der Inhalt von Aufgabe 4.2. □

Für homogene Potentiale die Trägheitsmoment

$$I : \mathscr{R} \to \mathbb{R}^+, \qquad I(\mathbf{r}) := \frac{1}{2} \langle \mathbf{r}, \mathbf{M} \cdot \mathbf{r} \rangle, \ \ \forall\, \mathbf{r} \in \mathscr{R}$$

spielt eine wichtige Rolle.

Beispiel 24.5. Für ein System von n-Körpern mit Matrix $\mathbf{M}$ gegeben durch (22.7) haben wir einfach

$$I(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Hilfsatz 24.6 (Lagrange-Jacobi Identität)**.** *Es sei $U : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ eine p-homogene Potential. Wenn $\mathbf{r}$ eine Lösung von $\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = -\operatorname{grad} U(\mathbf{r})$ mit Energie $E(\mathbf{r},\mathbf{v}) = h$ ist, gilt dann*

$$\ddot{I} = 2T - pU = 2h - (p+2)U = (p+2)T - ph. \tag{24.2}$$

Beweis. Mit Hilfe der Symmetrie von $\mathbf{M}$ haben wir

$$\dot{I} = \tfrac{1}{2}\langle\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{M}\cdot\mathbf{r}\rangle + \tfrac{1}{2}\langle\mathbf{r}, \mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{r}}\rangle = \langle\mathbf{r}, \mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{r}}\rangle.$$

Wenn wir nochmal ableiten, bekommen wir

$$\ddot{I} = \langle\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{r}}\rangle + \langle\mathbf{r}, \mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{r}}\rangle = 2T(\dot{\mathbf{r}}) - \langle\mathbf{r}, \operatorname{grad} U(\mathbf{r})\rangle = 2T(\dot{\mathbf{r}}) - pU(\mathbf{r}).$$

Das zeigt die erste Identität. Die anderen zwei folgen aus $h = T + U$. □

Mit Hilfe der Trägheitsmoment können wir die maximale Lösungen des n-Körperproblem mit endlichem Lebensdauer besser verstehen. Insbesonder werden wir beweisen, dass für $n = 3$ sie einer Kollision entsprechen.

Definition 24.7. Eine Lösung $\mathbf{r} : [0, t_\infty) \to \Delta^c$ von (22.8) erlebt eine totale Kollision, wenn es $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$\lim_{t\to t_\infty} \mathbf{r}_i(t) = \mathbf{q}, \qquad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Hilfsatz 24.8. *Wenn eine Lösung $\mathbf{r} : [0, t_\infty) \to \Delta^c$ von (22.8) mit $\mathbf{r}_S \equiv \mathbf{0}$ eine totale Kollision in $\mathbf{q}$ erlebt, dann $\mathbf{r}_S = \mathbf{q}$. Es folgt daraus, dass $\lim_{t\to t_\infty} I(t) = 0$.*

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus

$$\mathbf{r}_S = \lim_{t\to t_\infty} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i(t) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \lim_{t\to t_\infty} \mathbf{r}_i(t) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{q} = \frac{1}{m} m\mathbf{q} = \mathbf{q}.$$ □

Satz 24.9. *Es sei $\mathbf{r} : [0, t_\infty) \to \Delta^c$ eine maximale Lösung von (22.8) mit $\mathbf{r}_S = \mathbf{0}$, wobei $\nu_{ij} > 0$ und $\tilde{U}(r) = \tilde{U}_1 r^p$ mit $\tilde{U}_1 < 0$ und $p \in (-2, 0)$ (zum Beispiel $\mathbf{r}$ löst (22.1)). Es sei angenommen, dass $i \neq j$ gibt mit*

$$\lim_{t\to t_\infty} r_{ij}(t) = 0.$$

Dann $\lim_{t\to t_\infty} \ddot{I}(t) = +\infty$ und

$$\textit{entweder} \qquad \lim_{t\to t_\infty} I(t) = 0 \qquad \textit{oder} \qquad \exists\, I_0 \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, t \in [0, t_\infty), \quad I(t) \geq I_0. \tag{24.3}$$

Im ersten Fall erlebt das System eine totale Kollision, die Lebensdauer t_∞ ist endlich und $\dot{I}(t)$ ist negativ für t groß genug. Im zweiten Fall und unter der zusätzlichen Voraussetzung $n = 3$ gilt die folgende Aussage: Wenn $t_\infty = +\infty$, dann konvergieren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ gegen $\infty \in \bar{\mathbb{R}}^3$; wenn $t_\infty < +\infty$ gibt es $\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^3$ und $\rho \in \mathbb{R}^+$, sodass

- $\lim_{t\to t_\infty} \mathbf{r}_i(t) = \mathbf{q}_1 = \lim_{t\to t_\infty} \mathbf{r}_j(t)$,
- $\forall\, t \in [0, t_\infty), \quad r_{i\ell}(t) \geq \rho, \quad r_{j\ell}(t) \geq \rho,$

wobei $\ell \neq i, j$.

Beweis. Unter den Voraussetzungen über das Potential gilt $U(\mathbf{r}) \leq U_1 r_{ij}^p$, $U_1 := \nu_{ij}\tilde{U}_1 < 0$. Da $r_{ij}(t)$ für $t \to t_\infty$ gegen Null konvergiert, haben wir auch

$$\lim_{t\to t_\infty} U(\mathbf{r}(t)) \leq \lim_{t\to t_\infty} U_1 r_{ij}^p(t) = -\infty.$$

Nach der Lagrange-Jacobi Identität

$$\lim_{t\to t_0} \ddot{I}(t) = \lim_{t\to t_0} \Big(2h + (p-2)U(\mathbf{r}(t))\Big) = +\infty.$$

Das impliziert, dass entweder $\dot{I}(t) < 0$ für t groß genug oder $\dot{I}(t) > 0$ für t groß genug. Im ersten Fall muss t_∞ endlich sein, wie wir jetzt begründen. Es gibt t_1, sodass für alle $t \geq t_1$ die Ungleichungen $\ddot{I}(t) \geq 1$ und $\dot{I}(t) < 0$ gelten. Der Fundamentalsatz der Analysis liefert

$$0 > \dot{I}(t) = \dot{I}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \ddot{I}(\tau)\mathrm{d}\tau \geq \dot{I}(t_1) + (t - t_1)$$

und wir folgern $t < t_1 - \dot{I}(t_1)$. Es sei dann $I_\infty := \lim_{t\to t_\infty} I(t)$. Wenn $I_\infty = 0$, erlebt das System eine totale Kollision. Wenn $I_\infty > 0$, besitzt I eine positive untere Schranke. Die Alternative (24.3) ist somit vollständig bewiesen.

Es sei nun angenommen, dass $n = 3$ und $I(t) \geq I_0 > 0$ für alle $t \in [0, t_\infty)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $i = 1$, $j = 2$ und $\ell = 3$. Es sei $\mathbf{r}' := \frac{1}{m'}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)$, wobei $m' := m_1 + m_2$. Wir haben

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m'}\mathbf{r}_{21}, \qquad \mathbf{r}' - \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m'}\mathbf{r}_{12},$$

sodass $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|$ und $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2|$ gegen Null konvergieren für $t \to t_\infty$. Da $\mathbf{0} = \mathbf{r}_S$ gewinnen wir

$$\mathbf{r}' = -\frac{m_3}{m'}\mathbf{r}_3, \qquad \mathbf{r}_3 = -\frac{m'}{m_3}\mathbf{r}' \tag{24.4}$$

und wir haben die Formel

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \frac{m_1 m_2}{m'} r_{12}^2 = m' r'^2. \tag{24.5}$$

Es folgt daraus, dass

$$I = I' - \frac{m_1 m_2}{m'} r_{12}^2, \qquad I' := \frac{1}{2} m' r'^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2$$

sodass $|I(t) - I'(t)|$ gegen Null konvergiert für $t \to t_\infty$. Wir leiten aus (24.4)

$$\frac{1}{2}\frac{m_3 m}{m'} r_3^2 = I' = \frac{1}{2}\frac{m' m}{m_3} r'^2$$

her. Es sei nun angenommen, dass $t_\infty = +\infty$. Dann $I(t) \to +\infty$, da $\ddot{I}(t) \to +\infty$. Wir haben auch $I'(t) \to +\infty$ und deshalb $r_3, r' \to +\infty$.

Es sei nun angenommen, dass $t_\infty < +\infty$. Aus einem Beweis per Widerspruch folgt es, dass es ein $\rho > 0$ gibt mit $r_{13}(t) \geq \rho$ und $r_{13}(t) \geq \rho$ (sonst $\liminf_{t \to t_\infty} I(t) = 0$). Nach der Gleichung (22.8) gewinnen wir

$$|\ddot{\mathbf{r}}_3| \leq C, \qquad C := \tfrac{1}{m_3}(\nu_{13} + \nu_{23}) p \tilde{U}_1 \rho^{p-1}.$$

Der Fundamentalsatz der Analysis liefert $|\dot{\mathbf{r}}_3| \leq C'$ und deshalb

$$|\mathbf{r}_3(t) - \mathbf{r}_3(t')| \leq C'|t - t'|, \qquad \forall\, t, t' \in [0, t_\infty).$$

Da $t_\infty < +\infty$ sehen wir, dass $\mathbf{r}_3(t) \to \mathbf{q}_3 \in \mathbb{R}^3$ als $t \to t_\infty$. Dann $\mathbf{q}_1 = -\frac{m_3}{m'}\mathbf{q}_3$. $\square$

Aufgabe 24.10. *Es sei $\tilde{U}(r) = \tilde{U}_1 r^p$ mit $\tilde{U}_1 < 0$ und $-2 < p < 0$. Wir betrachten eine Lösung $\mathbf{r} : [0, +\infty)$ mit unendlicher Lebensdauer. Zeigen Sie, dass falls $h \geq 0$ die Konfiguration nicht beschränkt ist. Das heißt, dass für jede $t_0 > 0$ und $\rho > 0$ für alle $t \geq t_0$ ein Körper $\mathbf{r}_{i(t)}$ existiert mit $r_{i(t)}(t) > \rho$.*

25 Totale Kollisionen und homographische Lösungen 19.7.

25.1 Der Satz von Sundman

Wir werden nun den folgenden Satz von Sundman über totale Kollisionen beweisen.

Satz 25.1 (Sundman, 1912)**.** *Es sei $\tilde{U}(r) = \tilde{U}_1 r^p$ mit $\tilde{U}_1 < 0$ und $-2 < p < 0$. Eine Lösung $\mathbf{r} : [0, t_\infty) \to \Delta^c$ von (22.8) bezüglich dem Potential $\tilde{U}$ mit $\mathbf{r}_S \equiv \mathbf{0}$, die eine totale Kollision erlebt, besitzt verschwindenden Drehimpuls: $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.*

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir die folgende Abschätzung.

Hilfsatz 25.2 (Sundmans Ungleichung)**.** *Für jede Lösung von (22.8) mit $\tilde{U}$ eine p-homogene Funktion gilt*

$$c^2 \leq \frac{4}{p+2} I(\ddot{I} + ph). \tag{25.1}$$

Beweis. Wir schätzen ab

$$c = \Big| \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \Big| \leq \sum_{i=1}^n m_i |\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i| \leq \sum_{i=1}^n m_i r_i v_i = \sum_{i=1}^n (\sqrt{m_i} r_i)(\sqrt{m_i} v_i) \leq \sqrt{2I}\sqrt{2T},$$

wo wir im letzten Schritt die Cauchy-Schwarz Ungleichung benutzt haben. Da $(p+2)T = \ddot{I} + ph$ nach (24.6), folgt durch Quadrierung

$$c^2 \leq 4IT = 4I \frac{\ddot{I} + ph}{p+2}.$$ □

Beweis des Satzes von Sundman. Wir nehmen $t_1 \in (0, t_\infty)$ groß genug, sodass $\dot{I}(t) < 0$ und $I(t) < 1$ für alle $t \in (t_1, t_\infty)$. Wir multiplizieren dann die Sundmans Ungleichung nach $-\dot{I}/I > 0$ und bekommen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(c^2 \log \frac{1}{I}\Big) = -c^2 \frac{\dot{I}}{I} \leq -\frac{4}{p+2}(ph\dot{I} + \dot{I}\ddot{I}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[-\frac{4}{p+2}\Big(phI + \frac{1}{2}\dot{I}^2\Big)\Big].$$

Also gibt es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ mit

$$c^2 \log \frac{1}{I} \leq -\frac{4}{p+2}\Big(phI + \frac{1}{2}\dot{I}^2\Big) + K \leq CI + K, \qquad C := \frac{-4ph}{p+2}.$$

Da $I < 1$ ist $\log \frac{1}{I} > 0$ und wir schließen

$$c^2 \leq \frac{CI + K}{\log \frac{1}{I}}.$$

Wir nehmen dann den Limes der rechten Seite für $t \to t_\infty$ und benutzen dass $I(t) \to 0$, sodass $\log \frac{1}{I(t)} \to +\infty$ und

$$c^2 \leq \lim_{t \to t_\infty} \frac{CI(t) + K}{\log \frac{1}{I(t)}} = 0.$$ □

25.2 Homographische Lösungen

In diesem Abschnitt werden wir nur das n-Körperproblem (möglicherweise eingeschränkte) betrachten. Die Diskussion lässt sich leicht für ein abstraktes Potential der Art $\tilde{U}(r) = \tilde{U}_1 r^p$ mit $\tilde{U}_1 < 0$ und $p < 0$ anpassen.

Also suchen wir nach Lösungen von (22.3), die schöne geometrische Eigenschaften besitzen und werden stets annehmen, dass alle die Konfigurationen Schwerpunkt in $\mathbf{0}$ haben.

Definition 25.3. Eine Lösung $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) : (t_0, t_1) \to \Delta^c$ von (22.3) heißt *homographisch*, wenn $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in \Delta^c$ und Abbildungen $\lambda : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}^+$ und $Q : (t_0, t_1) \to SO(3)$ existieren, sodass

$$\mathbf{r}_i(t) = \lambda(t) Q(t) \mathbf{a}_i, \qquad \forall\, t \in (t_0, t_1), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{25.2}$$

Also bleibt die Lösung selbstähnlich. Eine homographische Lösung $\mathbf{r}$ ist

- *homothetisch*, wenn Q konstant ist (o.B.d.A. $Q(t) \equiv \mathbf{I}_3$);
- ein *relatives Gleichgewicht*, wenn λ konstant ist (o.B.d.A. $\lambda(t) \equiv 1$);
- *eben*, wenn eine *feste* Ebene α (durch $\mathbf{0}$) existiert, sodass

  $$\mathbf{r}_i(t) \in \alpha, \qquad \forall\, t \in (t_0, t_1), \quad i = 1, \ldots, n.$$

  Wenn wir o.B.d.A. annehmen, dass $\alpha = \mathbb{C} \times 0 \subset \mathbb{R}^3$ die xy-Ebene ist, dann haben wir die äquivalente Darstellung

  $$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{z}(t) \mathbf{a}_i, \qquad \forall\, t \in (t_0, t_1), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{25.3}$$

  wobei $\mathbf{r}_i(t), \mathbf{z}(t), \mathbf{a}_i$ komplexe Zahlen sind und die Multiplikation zwischen $\mathbf{z}_i(t)$ und $\mathbf{a}_i$ komplex ist.

Bemerkung 25.4. Man kann zeigen, dass eine homographische Lösung homothetisch ist, genau dann wenn der gesamte Drehimpuls verschwindet (Aufgabe 7.6 im Buch von Geiges).

Wir fangen an, die homothetische Lösungen zu beschreiben.

Definition 25.5. Es seien $m_1, \ldots, m_{n-1} > 0$ und $m_n \geq 0$. Eine Konfiguration $\mathbf{a} \in \Delta^c$ heißt *zentral* bezüglich der Massen $m_1, \ldots, m_n$, wenn es $\mu \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\mu \mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} \frac{G m_j}{a_{ij}^2} \hat{\mathbf{a}}_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{25.4}$$

Wenn $m_n > 0$, lässt sich diese Bedingung auch als

$$\mu \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} = \operatorname{grad} U(\mathbf{a}) \tag{25.5}$$

umschreiben. Die Konfiguration $\mathbf{a}$ heißt eben, wenn es eine Ebene α gibt, sodass $\mathbf{a}_i \in \alpha$ für $i = 1, \ldots, n$.

Bemerkung 25.6. Wenn $m_n = 0$ und $\mathbf{a}$ zentral ist, dann bilden auch die $n-1$ Körper $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ auch eine zentrale Konfiguration.

Bemerkung 25.7. Es sei $\mathbf{a} \in \Delta^c$ zentral mit Konstante μ. Dann ist der Schwerpunkt $\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Außerdem, für alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ und $Q \in SO(3)$ ist $\lambda Q\mathbf{a} := (\lambda Q\mathbf{a}_1, \dots, \lambda Q\mathbf{a}_n)$ zentral mit Konstante μ/λ^3.

Satz 25.8. *Es sei* $\mathbf{a} \in \Delta^c$. *Die Konfiguration* $\mathbf{a}$ *ist zentral (mit Konstante* μ*) genau dann, wenn es eine Funktion* $\lambda : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}^+$ *gibt, sodass* $t \mapsto \mathbf{r}(t) := \lambda(t)\mathbf{a}$ *eine (homothetische) Lösung von* (22.1) *ist. In diesem Fall löst* λ *das* 1*-dimensionale Keplerproblem mit Konstante* μ*:*

$$\ddot{\lambda} = -\frac{\mu}{\lambda^2}.$$

Beweis. Es sei $\lambda : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion und man definiere $\mathbf{r}_i := \lambda \mathbf{a}_i$. Wir haben $\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\lambda}\mathbf{a}_i$ und

$$-\sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij} = -\lambda^2 \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{a_{ij}^2} \hat{\mathbf{a}}_{ij}.$$

ist $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\mathrm{grad}\, U(\mathbf{r})$ gleichbedeutend mit

$$\mu \mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{a_{ij}^2} \hat{\mathbf{a}}_{ij}, \qquad \mu := -\lambda^2 \ddot{\lambda}.$$

Da es $\mathbf{a}_i$ mit $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$ gibt, sehen wir, dass μ konstant ist. Die Behauptung ist bewiesen. □

Satz 25.9. *Es seien die Massen* $m_1, \dots, m_n$ *positiv. Die Konfiguration* $\mathbf{a} \in \Delta^c$ *ist zentral genau dann, wenn* $\mathbf{a}$ *ein kritischer Punkt der Funktion* $IU^2 : \Delta^c \to \mathbb{R}^+$ *ist. In diesem Fall ist die Konstante* μ *gegeben als*

$$\mu = -\frac{U(\mathbf{a})}{2I(\mathbf{a})} > 0.$$

Beweis. Wir nehmen das Skalarprodukt beider Seiten von (25.5) mit $\mathbf{a}$, sodass der Hilfsatz 24.3 liefert $\mu 2I(\mathbf{a}) = -U(\mathbf{a})$. Die Symmetrie von $\mathbf{M}$ liefert $\mathrm{grad}\, I(\mathbf{a}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a}$. Die Gleichung (25.5) lässt sich durch diese Identität und der Formel für μ äquivalent umschreiben als

$$-U(\mathbf{a}) \mathrm{grad}\, I(\mathbf{a}) = 2I(\mathbf{a}) \mathrm{grad}\, U(\mathbf{a}).$$

Wir multiplizieren diese Gleichung nach $U(\mathbf{a}) \neq 0$ und bekommen

$$\mathbf{0} = I(\mathbf{a})(2U(\mathbf{a}) \mathrm{grad}\, U(\mathbf{a}) + U^2(\mathbf{a}) \mathrm{grad}\, I(\mathbf{a}) = \mathrm{grad}\, \big(IU^2\big)(\mathbf{a}).$$ □

Folgerung 25.10. *Es seien die Massen* $m_1, \dots, m_n$ *positiv. Dann existiert eine zentrale Konfiguration bezüglich* $m_1, \dots, m_n$.

Beweis. Dank des Satzes 25.9 ist es genug zu zeigen, dass die Funktion IU^2 ein Minimum besitzt. Die Funktion ist 0-homogen, da

$$I(\lambda\mathbf{a})(U(\lambda\mathbf{a}))^2 = \lambda^2 I(\mathbf{a})\lambda^{-2}U(\mathbf{a})^2 = I(\mathbf{a})U(\mathbf{a})^2, \qquad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}^+,\ \mathbf{a} \in \Delta^c.$$

Also können wir die Funktion IU^2 auf der Menge $\Delta_1^c := \{I = 1\} \cap \Delta^c$ minimieren. Auf dieser Menge $IU^2 = U^2$. Es sei $\mathbf{a}_* \in \Delta_1^c$. Dann gibt es $\epsilon > 0$, so dass

$$\forall\,\mathbf{a} \in \Delta_1^c, \quad \exists\, i \neq j, \qquad a_{ij} < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad U^2(\mathbf{a}) > U^2(\mathbf{a}_*).$$

Dann

$$\inf_{\Delta_1^c} U^2 = \inf_{M'_\epsilon} U^2, \qquad M'_\epsilon := \{I = 1\} \cap \{r_{ij} \geq \epsilon \mid \forall\, i \neq j\} \subset \Delta_1^c \tag{25.6}$$

Da die Menge M'_ϵ kompakt ist, besitzt U^2 ein globales Minimum $\mathbf{a}_-$ auf M'_ϵ. Nach (25.6) ist $\mathbf{a}_-$ auch ein globales Minimum für U^2 auf Δ_1^c. □

Die Aufgabe 7.7 in dem Buch von Geiges zeigt, dass alle relative Gleichgewichte eben sind. Eigentlich gilt das folgende stärkere Resultat, das wir ohne Beweis angeben.

Satz 25.11. *Eine nicht ebene homographische Lösung ist homothetisch.* □

26 Ebene homographische Lösungen 23.7.

Der nächste Satz zeigt, dass auch die ebenen homographischen Lösungen sind durch zentrale Konfigurationen charakterisiert.

Wir brauchen dazu den folgenden Hilfsatz.

Hilfsatz 26.1. *Es sei* $\mathbf{a} \in \Delta^c$ *und* $\mu \in \mathbb{C}$, *sodass*

$$\mu \cdot \mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}.$$

Dann ist μ *eine positive reelle Zahl.*

Beweis. Wir können annehmen, dass alle die Massen positiv sind, sodass wir

$$\mu \cdot \operatorname{grad} I(\mathbf{a}) = \operatorname{grad} U(\mathbf{a}). \tag{26.1}$$

haben. Wir schreiben $\mu = \mu_1 + \mu_2 \mathbf{i}$ und wir müssen $\mu_2 = 0$ zeigen. Für alle $\theta \in \mathbb{R}$ haben wir $I(e^{i\theta}\mathbf{a}) = I(\mathbf{a})$ und $U(e^{i\theta}\mathbf{a}) = U(\mathbf{a})$. Wenn wir diese Identitäten nach θ ableiten und $\theta = 0$ einsetzen, finden wir

$$\langle \operatorname{grad} I(\mathbf{a}), \mathbf{ia} \rangle = 0, \qquad \langle \operatorname{grad} I(\mathbf{a}), \mathbf{ia} \rangle = 0.$$

Wir nehmen das Skalarprodukt der Gleichung (26.1) mit $\mathbf{ia}$ und finden

$$\langle \mu_1 \operatorname{grad} I(\mathbf{a}), \mathbf{ia} \rangle + \langle \mu_2 \mathbf{i} \cdot \operatorname{grad} I(\mathbf{a}), \mathbf{ia} \rangle = \langle \operatorname{grad} U(\mathbf{a}), \mathbf{ia} \rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_2 2I(\mathbf{a}) = 0.$$

Da $I(\mathbf{a}) > 0$ folgt es, dass $\mu_2 = 0$. □

Satz 26.2. *Es sei* $\mathbf{a} \in \Delta^c$ *eine ebene Konfiguration. Die Konfiguration* $\mathbf{a}$ *ist zentral (mit Konstante* μ*) genau dann, wenn es eine Funktion* $\mathbf{z} : (t_0, t_1) \to \mathbb{C}$ *gibt, sodass* $\mathbf{r} := \mathbf{z}(t)\mathbf{a}$ *eine (homographische) ebene Lösung von* (22.3) *ist. In diesem Fall löst* $\mathbf{z}$ *das* 2*-dimensionale Keplerproblem mit Konstante* μ*:*

$$\ddot{\mathbf{z}} = -\frac{\mu}{z^2}\hat{\mathbf{z}}.$$

Im Fall $\lambda \equiv 1$, *dann* $\mathbf{z}(t) = e^{i\omega t}$, *wobei* $\omega^2 = \mu$.

Beweis. Es sei $\mathbf{z} : (t_0, t_1) \to \mathbb{C} \setminus 0$ eine komplexe Funktion und man definiere $\mathbf{r}_i := \mathbf{z}\mathbf{a}_i$ so, dass $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{z}}\mathbf{a}_i$ und $\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{z}}\mathbf{a}_i$. Wir schreiben $\mathbf{z}(t) = \lambda(t)e^{i\theta(t)}$. Da wir $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{z}\mathbf{a}_{ij}$, $r_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\hat{\mathbf{r}}_{ij} = e^{i\theta}\hat{\mathbf{a}}_{ij}$ haben, folgt

$$\sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij} = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{\lambda^2 a_{ij}^2} e^{i\theta} \hat{\mathbf{a}}_{ij} = \frac{\mathbf{z}}{\lambda^3} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{a_{ij}^2} \hat{\mathbf{a}}_{ij}.$$

Daher gilt (22.3) genau dann, wenn

$$\mu \mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} \frac{G m_j}{a_{ij}^2} \hat{\mathbf{a}}_{ij}, \qquad \mu := -\frac{\lambda^3 \ddot{\mathbf{z}}}{\mathbf{z}}.$$

Außerdem μ ist konstant, weil $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$ für irgenwelche i und die Summe auf der rechten Seite konstant ist. Schließlich ist μ reell nach dem Hilfsatz 26.1. □

Je größer n ist, desto schwieriger ist, die homographische Lösungen mit n Körper zu bestimmen. Für $n = 2$ oder 3 können wir aber homographische Lösungen und zentrale Konfigurationen gut beschreiben.

Satz 26.3. *Alle Lösungen $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ des Zweikörperproblems sind eben homographisch und alle Konfigurationen $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ mit Schwerpunkt in $\mathbf{0}$ zentral. Alle homographischen Lösungen $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ sind eben. Es sei $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ eine Konfiguration mit Schwerpunkt in $\mathbf{0}$. Wenn $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ nicht kollinear sind, dann ist $\mathbf{a}$ zentral genau dann, wenn $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ die Scheitel eines gleichseitigen Dreiecks sind. Wenn $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ kollinear sind, und o.B.d.A. $\mathbf{a}_2$ zwischen $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_3$ liegt, dann gibt es eine einzige $\rho \in \mathbb{R}^+$, die nur von den Massen m_1, m_2, m_3 aber nicht von der Lage des Körpers abhängt, mit der Eigenschaft, dass $\mathbf{a}$ zentral ist, genau dann, wenn*

$$a_{23} = \rho a_{12}.$$

Also bis auf Ähnlichkeiten gibt es eine einzige kollineare zentrale Konfiguration für die gegebenen Massen m_1, m_2, m_3.

Beweis. Es sei $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ eine Lösung des Zweikörperproblems (mit $m_1, m_2 > 0$). Wir können annehmen, dass $\mathbf{r}_1 = \mathbf{z}_1$ und $\mathbf{r}_2 = \mathbf{z}_2$ komplexe Zahlen sind. Wir wissen, dass $\mathbf{z}_2(t) = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{z}_1$. Also setzen wir in (25.3) $\mathbf{z} := \mathbf{z}_1$, $\mathbf{a}_1 := 1$ und $\mathbf{a}_2 := -\frac{m_1}{m_2}1$. Dann $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}\mathbf{a}_2$.

Es sei nun $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ eine homographische Lösung des (möglicherweise eingeschränkten) Dreikörperproblem. Wenn $\mathbf{r}$ homothetisch ist, ist die Ebene durch $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{r}_3(t)$ unabhängig von t. Wenn $\mathbf{r}$ nicht homothetisch ist, wissen wir aus Satz 25.11, dass $\mathbf{r}$ sowieso eben ist. Man kann auch einen direkten Beweis der Ebenheit im Buch von Geiges (Theorem 7.1 und Exercise 7.9) finden.

Es seien $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ nicht kollinear. Das bedeutet, dass alle zwei Elemente aus $\mathbf{a}_{12}$, $\mathbf{a}_{23}$ und $\mathbf{a}_{31}$ linear unabhängig sind. Aus $\sum_{j=1}^3 m_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$ bekommen wir für $i = 1, 2, 3$

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{3} \big(m_j(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i) + m_j \mathbf{a}_i\big) = \sum_{j \neq i} m_j \mathbf{a}_{ji} + m\mathbf{a}_i.$$

Die Bedingungen (25.4) sind gleichbedeutend mit

$$\mathbf{0} = \sum_{j \neq i} m_j \Big(\frac{G}{a_{ij}^3} - \frac{\mu}{m}\Big)\mathbf{a}_{ij}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Da die Vektoren auf der rechten Seite linear unabhängig sind, folgt es, dass

$$a_{ij}^3 = \frac{Gm}{\mu}, \qquad \forall\, i \neq j.$$

Also sind die Abstände zwischen alle zwei Körpern gleich.

Es sei nun angenommen, dass $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ kollinear sind. Bis auf der Substitution $\mathbf{a}_i' = \lambda \mathbf{a}_i$ für $i = 1, 2, 3$ nehmen wir an, dass $a_{12} = 1$ und wir schreiben $\rho := a_{23}$. Wir identifizieren die drei Körper mit reellen Zahlen $x_1 < x_2 < x_3$ sodass, $x_2 = x_1 + 1$ und $x_3 = x_1 + (1+\rho)$. Bis auf der Substitution $\mu' = \mu/G$ wird das Gleichungsystem (25.4) zum

$$\begin{cases} \mu x_1 = m_2 + \dfrac{m_3}{(1+\rho)^2} \\ \mu(x_1+1) = -m_1 + \dfrac{m_3}{\rho^2} \\ \mu(x_1 + (1+\rho)) = -\dfrac{m_1}{(1+\rho)^2} - \dfrac{m_2}{\rho^2}. \end{cases} \tag{26.2}$$

Wir müssen dieses System nach μ, x_1 und ρ lösen. Wir haben ein äquivalentes System, wenn wir die zweite und dritte Gleichung durch ihre Differenz mit der ersten ersetzen:

$$\begin{cases} \mu x_1 = m_2 + \dfrac{m_3}{(1+\rho)^2} \\ \mu = -(m_1+m_2) + \dfrac{m_3}{\rho^2} - \dfrac{m_3}{(1+\rho)^2} \\ \mu(1+\rho) = -\dfrac{m_1+m_3}{(1+\rho)^2} - \dfrac{m_2}{\rho^2} - m_2. \end{cases} \tag{26.3}$$

Wir setzen μ von der zweiten Gleichung in die dritte und nach dem Beseitigen der Nenner bekommen wir

$$(m_1+m_2)\rho^5 + (3m_1+2m_2)\rho^4 + (3m_1+m_2)\rho^3 - (m_2+3m_3)\rho^2 - (3m_3+2m_2)\rho - (m_2+m_3) = 0$$

Die linke Seite ist ein Polynom $P(\rho)$ fünften Grades. Wir haben $P(0) < 0$ und $P(\infty) = +\infty$. Also gibt es zumindest eine Lösung der obigen Gleichung. Wir möchten nun zeigen, dass diese Lösung ist die einzige. Es sei dann per Widerspruch angenommen, dass es $\rho_0 < \rho_1$ mit $P(\rho_0) = 0 = P(\rho_1)$ gibt. Wir haben $P'(0) < 0$ und deswegen gibt es ein Minimum ρ_2 im Intervall $(0, \rho_0)$. Das Maximum für P auf dem Intervall $[\rho_2, \rho_1]$ ist nicht negativ, also gibt es einen maximierenden Punkt ρ_3 für P im Intervall (ρ_2, ρ_1) (man nehme $\rho_3 = \rho_0$, wenn das Maximum gleich Null ist). Dann $0 \leq P''(\rho_2)$ und $P''(\rho_3) \leq 0$. Aber $P'''(\rho) > 0$ für alle $\rho \in \mathbb{R}^+$, sodass P'' eine monoton steigende Funktion ist. Das ergibt den Widerspruch $0 \leq P''(\rho_2) < P''(\rho_3) \leq 0$. □

Bemerkung 26.4. Die homographische Lösungen mit drei Körpern sind nach Lagrange genannt, wenn die Körper nicht kollinear sind, und nach Euler genannt, wenn die Körper kollinear sind.

Aufgabe 26.5. *Es seien $m_1, m_2, m_3 > 0$. Beweisen Sie, dass die Trägheitsmoment $I(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ lässt sich schreiben als*

$$I(\mathbf{r}) = \frac{1}{4m}\sum_{i\neq j} m_i m_j r_{ij}^2 + \frac{1}{2} m r_S^2. \tag{26.4}$$

Hinweis: $2mI = \sum_j 2m_j \frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2 = \sum_{i,j} m_i m_j r_i^2$*. Dann ersetzen* $r_i^2 = r_{ij}^2 + 2\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j\rangle - r_j^2$*.*

Aufgabe 26.6. *Es seien $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ drei Körper mit positiven Massen und $\mathbf{r}_S = \mathbf{0}$, die ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a bilden. Finden Sie die Konstante μ für diese zentrale Konfiguration als Funktion von a und der Summe der Massen m. Finden Sie die Winkelgeschwindigkeit, wenn die drei Körper sich in einem Gleichgewicht bewegen.*

27 Das eingeschränkte Dreikörperproblem* 26.7.

Wir möchten nun das eingeschränkte Dreikörperproblem unter zusätlichen Bedingungen besser verstehen. Es sei dann $m_1 \geq m_2 > 0$ und $m_3 = 0$ und, um die Notation zu vereinfachen, wählen wir $G = 1$. Die Bahnen $t \mapsto \mathbf{r}_1(t)$ und $t \mapsto \mathbf{r}_2(t)$ lösen das Zweikörperproblem und wir annehmen, dass

- die Körper $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ sich in Kreisbahnen bewegen;
- der Körper $\mathbf{r}_3$ sich in der Bewegungsebene von $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ befindet und seine Geschwindigkeit tangent zu solcher Ebene zur Zeit $t = 0$ (äquivalent zu jeder Zeit) ist.

In diesem Fall reden wir von dem *ebenen kreisförmig eingeschränkten Dreikörperproblem.* Wir nehmen an, dass die Körper sich in der xy-Ebene bewegen. Wir nehmen $r_{12} = 1$ als Einheit der Länge und $m_1 + m_2 = 1$ als Einheit der Masse. Wir wählen die Anfangszeit $t = 0$, sodass $\mathbf{r}_1(0) = (-m_2, 0)$ und $\mathbf{r}_2 = ((1 - m_2), 0)$. Nach Aufgabe 22.6 ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$. Daher $\mathbf{r}_1(t) = -m_2 e^{it}$ und $\mathbf{r}_2(t) = (1 - m_2)e^{it}$. Wir möchten nun die Bewegung in einem Koordinatensystem beschreiben, das auch mit Winkelgeschwindigkeit 1 dreht. Wenn $\mathbf{z}_j$ die Ortsvektoren der Körper in den neuen Koordinaten sind, dann $\mathbf{r}_j(t) = e^{it}\mathbf{z}_j$. Nach der Definition $\mathbf{z}_1 = -m_2 \in \mathbb{C}$ und $\mathbf{z}_2 = 1 - m_2 \in \mathbb{C}$. Also $\mathbf{z}_1$ und $\mathbf{z}_2$ hängen nicht von der Zeit ab. Wir möchten nun die Gleichung (22.5) für $\mathbf{r}_3$ in eine Gleichung für $\mathbf{z}_3$ umschreiben. Die linke Seite ist

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -e^{it}\mathbf{z}_3 + 2\mathbf{i}e^{it}\dot{\mathbf{z}}_3 + e^{it}\ddot{\mathbf{z}}_3 = e^{it}\big(-\mathbf{z}_3 + 2\mathbf{i}e^{it}\dot{\mathbf{z}}_3 + \ddot{\mathbf{z}}_3\big).$$

Die rechte Seite ist

$$-(1-m_2)\frac{e^{it}(\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1)}{|e^{it}|^3|\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1|^3} - m_2\frac{e^{it}(\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2)}{|e^{it}|^3|\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2|^3} = -e^{it}\Big(\frac{(1-m_2)}{z_{31}}\hat{\mathbf{z}}_{31} + \frac{m_2}{z_{32}}\hat{\mathbf{z}}_{32}\Big)$$

Daher ist (22.5) äquivalent zu

$$\ddot{\mathbf{z}}_3 = -2\mathbf{i}\dot{\mathbf{z}}_3 + \mathbf{z}_3 - \frac{(1-m_2)}{z_{31}^2}\hat{\mathbf{z}}_{31} - \frac{m_2}{z_{32}^2}\hat{\mathbf{z}}_{32}. \tag{27.1}$$

Hier stellt der erste Term die Coriolis-Kraft und der zweite Term die Fliehkraft. Wenn wir die Funktion

$$U_3 : \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\} \to \mathbb{R}^-, \qquad U_3(\mathbf{z}_3) := -\Big(\frac{1}{2}z_3^2 + \frac{(1-m_2)}{z_{31}} + \frac{m_2}{z_{32}} + \frac{1}{2}m_2(1-m_2)\Big) \tag{27.2}$$

definieren, dann lässt sich (27.1) als

$$\ddot{\mathbf{z}}_3 = -2\mathbf{i}\dot{\mathbf{z}}_3 - \operatorname{grad} U_3(\mathbf{z}_3) \tag{27.3}$$

umschreiben, wobei selbstverständlich den Gradient von U_3 nur bezüglich der Variable $\mathbf{z}_3$ genommen ist. Da die lineare Abbildung $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{i}\mathbf{z}_3$ antisymmetrisch ist, sehen wir, dass die Gleichung (27.3) konservativ ist.

Folgerung 27.1. *Die Energie* $E_3 : \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *definiert als*

$$E_3(\mathbf{z}_3, \mathbf{v}_3) = \frac{1}{2} v_3^2 + U_3(\mathbf{z}_3)$$

ist ein erstes Integral für die Gleichung (27.3).

Aufgabe 27.2. *Zeigen Sie, dass die additive Konstante in der Formel für* U_3 *so gewählt ist, dass*

$$-U_3(\mathbf{z}) = (1 - m_2)\Big(\frac{z_{31}^2}{2} + \frac{1}{z_{31}}\Big) + m_2\Big(\frac{z_{32}^2}{2} + \frac{1}{z_{32}}\Big). \tag{27.4}$$

Hinweis: Es ist genug zu zeigen $z_3^2 + m_2(1-m_2) = (1-m_2)z_{31}^2 + m_2 z_{32}^2$. *Beweisen Sie diese Gleichung, indem Sie* $\mathbf{z} = (x, y)$ *schreiben.*

Wir möchten nun die kritischen Punkten und die Hillsregionen des Potentialen U_3 bestimmen.

Satz 27.3. *Ein Punkt* $\mathbf{z}_3$ *ist kritisch für* U_3 *genau dann, wenn* $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ *eine zentrale Konfiguration sind. Daher besitzt* U_3 *fünf kritische Punkte:*

- *die eulerschen Punkte* L_1, L_2, L_3, *die kollinear mit* $\mathbf{z}_1$ *und* $\mathbf{z}_2$ *sind. Der Punkt* L_3 *liegt links von* $\mathbf{z}_1$, L_1 *zwischen* $\mathbf{z}_1$ *und* $\mathbf{z}_2$ *(und näher zum leichteren Körper* m_2*) und* L_2 *rechts von* $\mathbf{z}_2$. *Es gilt* $U_3(L_1) \le U_3(L_2) \le U_3(L_3)$ *und die Punkte sind Sättel mit der* x*- und* y*-Achse als Hauptachsen:*

$$\begin{pmatrix} \partial_{xx}^2 U_3(L_i) & \partial_{xy}^2 U_3(L_i) \\ \partial_{yx}^2 U_3(L_i) & \partial_{yy}^2 U_3(L_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_i & 0 \\ 0 & w_i \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

  wobei u_i, v_i *positive reelle Zahlen sind.*

- *die lagrangeschen Punkte* L_4, L_5 *die jeweils ein gleichseitiges Dreieck mit* $\mathbf{z}_1$ *und* $\mathbf{z}_2$ *bilden. Die Punkte* L_4, L_5 *maximieren* U_3 *und* $U_3(L_4) = -\frac{3}{2} = U_3(L_5)$.

Beweis. Aus Aufgabe (4.2) wissen wir, dass $\mathbf{z}_3$ ein kritischer Punkt von U_3 ist genau dann, wenn die konstante Bahn $\mathbf{z}_3$ eine Lösung von (27.3) ist. Da $\mathbf{r}_3 = e^{it}\mathbf{z}_3$, bedeutet das, dass $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ eine ebene homographische Lösung geben. Nach Satz 26.2, bilden die Punkte $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ eine zentrale Konfiguration. Nach Satz 26.3 bekommen wir dann drei kollineare Konfigurationen jeweils für die Massen $0, m_2, 1 - m_2$ (das ist L_3), die Massen $m_2, 0, 1 - m_2$ (das ist L_1) und die Massen $m_2, 1 - m_2, 0$ (das ist L_2). Wir haben hier keine Zeit, die weiteren erwähnten Eigenschaften dieser Punkte zu beweisen.

Die nicht kollineare Lösungen müssen ein gleichseitiges Dreieck bilden mit Scheitel in $\mathbf{z}_1$ und $\mathbf{z}_2$. Daher ist $z_{31} = 1 = z_{32}$ und wir haben für $\mathbf{z}_3$ nur zwei mögliche Lagen: $L_4 = (1/2 - m_2, \sqrt{3}/2)$ und $L_5 = (1/2 - m_2, -\sqrt{3}/2)$. Wir zeigen nun, dass L_4, L_5 die Funktion U_3 maximieren. Dank der Formel 27.4 genügt es zu zeigen, dass 1 die Funktion $r \mapsto \frac{r^2}{2} + \frac{1}{r}$ für $r \in \mathbb{R}^+$ minimiert. Das ist klar, weil die Ableitung der Funktion genau für $r = 1$ verschwindet und wir haben

$$\lim_{r \to 0} \frac{r^2}{2} + \frac{1}{r} = +\infty, \qquad \lim_{r \to +\infty} \frac{r^2}{2} + \frac{1}{r} = +\infty. \qquad \square$$

Folgerung 27.4. *Wenn $m_1 > m_2$ besitzt die Hillsregion $U_3^{\leq h} = \{U_3 \leq h\}$ mit $h \in \mathbb{R}$ die folgenden zusammenhängenden Komponenten:*

- *Für $h < U_3(L_1)$ eine beschränkte Komponente K_1 um $\mathbf{z}_1$, eine beschränkte Komponente K_2 um $\mathbf{z}_2$ und eine unbeschränkte Komponente K_∞. Die Mengen $K_1 \cup \{\mathbf{z}_1\}$, $K_2 \cup \{\mathbf{z}_2\}$ und $\mathbb{C} \setminus K_\infty$ sind homöomorph zu Scheiben.*
- *Für $U_3(L_1) < h < U_3(L_2)$ eine beschränkte Komponente K_{12} um $\mathbf{z}_1$ und $\mathbf{z}_2$ und eine unbeschränkte Komponente K_∞. Die Mengen $K_{12} \cup \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ und $\mathbb{C} \setminus K_\infty$ sind homöomorph zu Scheiben.*
- *Für $U_3(L_2) < h < U_3(L_3)$ eine unbeschränkte Komponente $K_{12\infty}$ um $\mathbf{z}_1$ und $\mathbf{z}_2$. Die Menge $\mathbb{C} \setminus K_{12\infty}$ ist homöomorph zu einer Scheibe, die die reelle Achse in einem Intervall schneidet.*
- *Für $U_3(L_3) < h < -3/2$ eine unbeschränkte Komponente $K_{12\infty}$ um $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$, die die ganze reelle Achse enthält. Die Menge $\mathbb{C} \setminus K_{12\infty}$ hat zwei Komponenten, die homöomorph zu Scheiben sind.*

Beweis. Wir geben hier nur eine Idee des Beweises, die die Morse Theorie benutzt. Wir denken an h als ein Parameter die von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft. Dann benutzen wir das Prinzip, dass die Hillsregionen $U_3^{\leq h}$ homöomorph bleiben bislang h keinen der kritischen Werten $U_3(L_i)$ trifft. Dasselbe gilt für ihr Komplement $U_3^{>h} = \mathbb{C} \setminus U_3^{\leq h}$.

Für $\mathbf{z}$ in einer kleinen Umgebung von $\mathbf{z}_i$ ist $U_3(\mathbf{z})$ ungefähr m_i/z_{3i} und für $\mathbf{z}$ in einer Umgebung von ∞ ist $U_3(\mathbf{z})$ ungefähr $\frac{1}{2}z_3^2$. Also, wenn h sehr negativ ist $U_3^{\leq h}$ die Vereinigung von kleinen Störungen der Hillsregionen dieser drei Funktionen. Deshalb besitzt $U_3^{\leq h}$ für $h < U_3(L_1)$ die behauptete Gestalt. Da L_4 und L_5 Maxima sind, ist $U_3^{>h}$ die Vereinigung zwei kleine Scheiben um L_4 und L_5 für $h = -3/2 - \epsilon$. Das zeigt die Behauptung für $U_3(L_3) < h < -3/2$. Die Behauptung für die übrigen zwei Intervalle folgt es aus der Tatsache, dass L_1, L_2, L_3 Sattelpunkte für U_3 sind und dass wir in einer Umgebung solcher Punkte die Aufgabe 4.5 benutzen können. □

Wir wissen, dass kritische Punkten des Potentialen konstante Bahnen ergeben. Die naturelle Frage in diesem Zusammenhang ist zu verstehen, ob diese Punkte stabil oder instabil für die Dynamik sind, nämlich ob Bahnen mit geringer Geschwindigkeit, die sich in einer kleinen Umgebung des kritischen Punkt befinden, werden in der nähe des Punktes für alle Zeiten bleiben.

Satz 27.5. *Die Punkte L_1, L_2, L_3 sind immer instabil. Die Punkte L_4, L_5 sind stabil, wenn $27m_2(1 - m_2) < 1$ und m_2 nicht gleich ein von drei Ausnahmewerten ist.* □

Aufgabe 27.6. *Wir betrachten hier das Sitnikov-Problem. Das ist ein eingeschränktes Dreikörperproblem, wobei $m_1 = m_2 = 1/2$, die Primärkorper sich auf der xy-Ebene bewegen und der Satellit $\mathbf{r}_3$ zur Anfangszeit auf der z-Achse mit einer Geschwindigkeit parallel zu der z-Richtung ist. Zeigen Sie, dass $\mathbf{r}_3(t) = (0, 0, r_3(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Das heißt, dass* *der Satellit bleibt für jede Zeit auf der z-Achse. Bestimmen Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung für r_3 als Funktion von $r(t)$, dem Abstand der Primärkörper von $\mathbf{0}$. Es sei nun angenommen, dass die Primärkörper einer Kreisbahn mit Radius r folgen. Zeigen Sie, dass die Gleichung für r_3 konservativ ist und bestimmen Sie das zugehörige Potential. Für welche Werte der Energie ist die Bewegung des Satelliten beschränkt?*

Bibliographie

1. Florin Diacu, *The solution of the n-body Problem.*

2. Hansjörg Geiges, *The Geometry of celestial mechanics.*

3. Richard Moeckel, *Central configurations.*