19 Satz von Osipov-Belbruno für $h = 1/2$ (Teil I) 28.6.

Wir diskutieren nun die Beziehung zwischen Bahnen mit positiver Energie und der hyperbolischen Geometrie. Wir verwenden dafür die folgende Schreibweise

$$\bar{\mathbb{R}}_1^{n-1} := \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \setminus \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid v \leq 1\}.$$

Satz 19.1 (Osipov-Belbruno; $h = 1/2$)**.** *Die Einschränkung der stereographischen Projektion $\Psi_1 : \mathbb{H}^3 \to \bar{\mathbb{R}}_1^3$ auf dem hyperbolischen Raum gibt eine Bijektion zwischen den den Großhyperbeln in $\mathbb{H}^3$ und den Hodographen des keplerschen Problems mit $h = 1/2$. Wenn die Großhyperbeln nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrist ist, ist der Hodograph nach nach der exzentrischen Anomalie parametrisiert.*

Wir fangen an, den hyperbolischen Raum in beliebiger Dimension zu definieren.

Definition 19.2. Das Minkowski-Produkt $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist die symmetrische Bilinearform

$$M(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \rangle - z_1 z_2, \qquad \forall\, \mathbf{x}_1 = (\mathbf{y}_1, z_1),\ \mathbf{x}_2 = (\mathbf{y}_2, z_2) \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt für Vektoren des $\mathbb{R}^{n-1}$ ist. Für alle $r \in \mathbb{R}$ definieren wir die Teilmenge

$$\mathbb{H}_r^{n-1} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; M(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r \right\}$$

und setzen $\mathbb{H}^{n-1} := \mathbb{H}_{-1}^{n-1} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid z > 0\}$.

Aufgabe 19.3. *Machen Sie eine Skizze von $\mathbb{H}_r^{n-1}$ für beliebige r, wenn $n = 2$ und 3.*

Bemerkung 19.4. Ein Punkt $(\mathbf{y}, z)$ gehört zu $\mathbb{H}^{n-1}$ genau dann, wenn $z^2 - y^2 = 1$ und $z > 0$. Aus dieser Gleichung folgt es, dass $\mathbf{N} \in \mathbb{H}^{n-1}$ und dass $(\mathbf{y}, z) \in \mathbb{H}^{n-1}$ genau dann, wenn $(y, z) \in \mathbb{H}^1$. Außerdem, für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n-1}$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{N}$ gilt $z > 1$. Wir haben die Kette von Gleichungen

$$y < z \leq y + 1 \tag{19.1}$$

mit Gleichung genau dann, wenn $(\mathbf{y}, z) = \mathbf{N}$. Die erste Ungleichung folgt aus $z^2 - y^2 = 1 > 0$ und die zweite aus

$$1 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y) \geq (1 + 0)(z - y) = z - y, \qquad \forall\, (\mathbf{y}, z) \in \mathbb{H}^{n-1}.$$

Definition 19.5. Wir definieren die stereographische Projektion $\Psi_1 : \mathbb{H}^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}_1^{n-1}$ als

$$\Psi_1(\mathbf{x}) := \tilde{\Psi}(\mathbf{x}) = \mathbf{v} = \frac{1}{1 - z}\mathbf{y}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n-1} \setminus \{\mathbf{N}\}, \qquad \Psi_1(\mathbf{N}) := \infty.$$

Satz 19.6. *Die Abbildung $\Psi_1 : \mathbb{H}^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}_1^{n-1}$ ist ein wohl definierter Homöomorphismus dessen Umkehrabbildung $\Phi_1 : \bar{\mathbb{R}}_1^{n-1} \to \mathbb{H}^{n-1}$ die folgende Formel besitzt*

$$\Phi_1(\infty) = \mathbf{N}, \qquad \Phi_1(\mathbf{v}) = \left(\frac{2}{1 - v^2}\mathbf{v}, 1 - \frac{2}{1 - v^2} \right), \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}_1^{n-1}.$$

Beweis. Wenn $\mathbf{v} = \Psi_1(\mathbf{x})$, dann gilt $v > 1$ aus (19.1). Die Stetigkeit von Ψ_1 folgt aus Aufgabe 13.12, weil

$$v = \frac{y}{z-1} = \frac{\sqrt{z^2-1}}{z-1} = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}.$$

Das Umkehrbild $\Phi_1(\mathbf{v})$ berechnen wir durch die Gleichungen

- $t(\mathbf{v},0) + (1-t)\mathbf{N} = \Phi_1(\mathbf{v}), \quad t < 0,$
- $M(\Phi_1(\mathbf{v}), \Phi_1(\mathbf{v})) = -1.$

Wir finden zuerst den Wert von t:

$$t^2v^2 - (1-t)^2 = -1, \quad t < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \frac{2}{1-v^2}.$$

Wir setzen t in die erste Gleichung und erhalten die Formel für $\Phi_1(\mathbf{v})$. Die Stetigkeit von Φ_1 folgt aus Aufgabe 13.12, da $\lim_{|\mathbf{v}|\to\infty} \Phi_1(\mathbf{v}) = \mathbf{N}$. □

Definition 19.7. Eine Großhyperbel ist die Schnittmenge zwischen $\mathbb{H}^{n-1}$ und eine 2-Ebene α durch $\mathbf{0}$.

Hilfsatz 19.8. *Wenn α die tragende Ebene einer Großhyperbel ist, gibt es $\mathbf{e}_1 \in S^{n-2}$ und $\mathbf{x} = (-\sqrt{e^2-1}\mathbf{f}_1, e) \in \mathbb{H}^{n-1}$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\alpha = \mathbb{R} \cdot (\mathbf{e}_1, 0) + \mathbb{R} \cdot \mathbf{x}, \qquad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1 \rangle = 0.$$

Der Punkt $\mathbf{x}$ und, bis auf Vorzeichen, der Vektor $\mathbf{e}_1$ sind eindeutig bestimmt von α. Wenn $\mathbf{x} \neq \mathbf{N}$ ist der Vektor $\mathbf{f}_1$ auch eindeutig.

Beweis. Die Ebene α darf nicht in $\{z = 0\}$ enthalten sein, da sie den hyperbolischen Raum schneidet. Daher gibt es bis auf Vorzeichen einen einzigen Vektor $\mathbf{e}_1 \in S^{n-2}$ mit $(\mathbf{e}_1, 0) \in \alpha$. Es sei nun $\mathbf{x}' \in \mathbb{H}^{n-1} \cap \alpha$. Wir nehmen $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' - M(\mathbf{x}', \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$, sodass $M(\mathbf{x}'', \mathbf{e}_1) = 0$. Wir berechnen $M(\mathbf{x}'', \mathbf{x}'') = -1 - M(\mathbf{x}', \mathbf{e}_1)^2$ und

$$\mathbf{x} := \frac{\mathbf{x}''}{\sqrt{1 + M(\mathbf{x}', \mathbf{e}_1)^2}}$$

ist der gewünschte Vektor. □

Wir bestimmen nun das Bild der Großhyperbeln durch die stereographische Projektion. Zu diesem Zweck definieren wir

$$K^{n-1} := \{\mathbf{x} = (\mathbf{w}, 1) \in \mathbb{R}^n \mid w < 1\}, \qquad S^{n-1}_+ := S^{n-1} \cap \{\mathbf{x} = (\mathbf{w}, z) \in \mathbb{R}^n \mid z > 0\}$$

und drei Abbildungen

$$F_1 : \mathbb{H}^{n-1} \to \mathbb{H}^{n-1}, \qquad G : \mathbb{H}^{n-1} \to K^{n-1}, \qquad P : K^{n-1} \to S^{n-1}_+,$$

wobei

$$F_1(\mathbf{y}, z) = (-\mathbf{y}, z), \qquad G(\mathbf{y}', z) = (\mathbf{y}'/z, 1), \qquad P(\mathbf{w}, 1) = (\mathbf{w}, \sqrt{1-w^2}).$$

Die Abbildung F_1 ist eine Drehung um einen glatten Winkel um die z-Achse. Die Abbildung G gibt der Schnittpunkt zwischen der Halbgerade $\mathbb{R}^+(\mathbf{y}', z)$ und der Scheibe K^{n-1}. Die Abbildung P ist die orthogonale Projektion in die z-Richtung auf die Hemisphäre S^{n-1}_+.

Aufgabe 19.9. *Beweisen Sie, dass G invertierbar ist mit Umkehrabbildung*

$$G^{-1}(\mathbf{w},1)=\Big(\frac{\mathbf{w}}{\sqrt{1-w^2}},\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\Big),\qquad \forall\,(\mathbf{w},1)\in K^{n-1}.$$

Satz 19.10. *Wir haben die Darstellung $\Psi_1=\Psi\circ P\circ G\circ F_1$, wobei $\Psi : S_+^{n-1}\to\bar{\mathbb{R}}_1^{n-1}$ die Einschränkung der stereographischen Projektion ist.*

Beweis. Es sei $(\mathbf{y},z)\in\mathbb{H}^{n-1}$. Wir berechnen

$$P\circ G\circ F_1\big(\mathbf{y},z\big)=P\circ G\big(-\mathbf{y},z\big)=P\Big(-\frac{\mathbf{y}}{z},1\Big)=\Big(-\frac{\mathbf{y}}{z},\sqrt{1-\frac{y^2}{z^2}}\Big)=\Big(-\frac{\mathbf{y}}{z},\frac{1}{z}\Big),$$

wo wir die Gleichung $y^2-z^2=-1$ benutzt haben. Schließlich gilt

$$\Psi\Big(-\frac{\mathbf{y}}{z},\frac{1}{z}\Big)=-\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\frac{\mathbf{y}}{z}=\frac{\mathbf{y}}{1-z}=\Psi_1(\mathbf{y},z).$$

□