

11 Die Kepler-Gleichung

28.5.

In diesem Abschnitt finden wir eine Beziehung zwischen der exzentrischen Anomalie und dem Zeitparameter, die als Kepler-Gleichung bekannt ist.

11.1 Der Fall $c \neq 0$

Satz 11.1. *Die Kurve $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_x^3$ ist eine maximale Lösung des keplerschen Problems (9.1) in einer Ebene $\alpha = \alpha_{\mathbf{r}}$ mit*

große Halbachse a , Exzentrizitätsvektor $\mathbf{e} \in \alpha$ mit $0 < e < 1$, Periapsisdurchgang t_0 genau dann, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{r}(t) = a(\cos u(t) - e)\hat{\mathbf{e}} + a\sqrt{1 - e^2} \sin u(t) \mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{e}}, \quad (11.1)$$

wobei $u(t)$ die einzige Lösung der folgenden Kepler-Gleichung ist:

$$u - e \sin u = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0), \quad u \in \mathbb{R}. \quad (11.2)$$

Die so entstandene Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein monoton wachsender Diffeomorphismus mit $u(t_0 + kp) = 2\pi k$, für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t(u) := t_0 + \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(u - e \sin u).$$

Wir haben

$$\frac{dt}{du} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(1 - e \cos u) \geq \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(1 - e) > 0.$$

Deshalb ist t invertierbar und wir schreiben $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für die Umkehrfunktion. Da die Funktion t invertierbar ist, ist für alle $t_1 \in \mathbb{R}$ die Zahl $u(t_1)$ die einzige Lösung von (11.2) mit $t = t_1$. Außerdem bekommen wir $u(t_0 + kp) = 2\pi k$, da

$$t(2\pi k) = t_0 + \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}2\pi k = t_0 + kp.$$

Es sei nun \mathbf{r} die Lösung von (9.1) mit große Halbachse a , Exzentrizitätsvektor \mathbf{e} und Periapsisdurchgang t_0 . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, wir nehmen an, dass $\alpha_{\mathbf{r}}$ die xy -Ebene ist und $\mathbf{e} = (e, 0, 0)$. Aus dem Hilfsatz 10.7 wissen wir, dass es eine Funktion

$w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $w(t_0) = 0$ und $x(t) = a(\cos w(t) - e)$, $y(t) = a\sqrt{1 - e^2} \sin w(t)$. Wir berechnen den Drehimpuls

$$c = xy - yx = a^2\sqrt{1 - e^2} \left((\cos w - e) \cos w + \sin^2 w \right) \dot{w} = c\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (1 - e \cos w) \dot{w},$$

wo wir (9.9) benutzt haben. Wir teilen durch $c\sqrt{a^3/\mu}$ und integrieren zwischen t_0 und t :

$$w(t) - e \sin w(t) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_0).$$

Es folgt daraus, dass $w(t)$ die Kepler-Gleichung löst. Daher $w(t) = u(t)$. □

Bemerkung 11.2. In der Literatur ist üblicher die Kepler-Gleichung in der Form

$$u - e \sin u = \frac{2\pi}{p} (t - t_0)$$

zu finden. Die ist äquivalent zu (11.2), denn

$$\frac{2\pi}{p} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

nach dem dritten keplerschen Gesetz. Die Größe

$$M(t) := \frac{2\pi}{p} (t - t_0) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_0)$$

ist die sogenannte **mittlere Anomalie**.

11.2 Geometrische Herleitung der Kepler-Gleichung*

Die Kepler-Gleichung lässt sich auch auf folgender Weise geometrisch beweisen. Es sei $\mathbf{r}(t)$ der Punkt auf \mathcal{E} und $\mathbf{s}(t)$ der entsprechende Punkt auf \mathcal{C} . Es sei nun $\tilde{\Omega}_{t_0,t}$ die Region innerhalb von \mathcal{C} zwischen den Halbgeraden $\mathbb{R}^+\mathbf{e}$ und $\mathbb{R}^+\mathbf{s}$. Wir möchten den Flächeninhalt von $\tilde{\Omega}_{t_0,t}$ zweierlei berechnen: einerseits durch die exzentrische Anomalie und andererseits durch den Drehimpuls c . Erstens gilt

$$\text{Area}(\tilde{\Omega}_{t_0,t}) = \text{Area}(\widehat{\mathbf{sM}\mathbf{r}_{\min}}) - \text{Area}(\widehat{\mathbf{sM}\mathbf{0}}),$$

wobei $\widehat{\mathbf{sM}\mathbf{r}_{\min}}$ der Kreissektor von \mathcal{C} zwischen \mathbf{s} und \mathbf{r}_{\min} ist und $\widehat{\mathbf{sM}\mathbf{0}}$ das Dreieck mit Scheiteln $\mathbf{s}, \mathbf{M}, \mathbf{0}$. Wir haben

$$\text{Area}(\widehat{\mathbf{sM}\mathbf{r}_{\min}}) = \frac{u}{2} a^2, \quad \text{Area}(\widehat{\mathbf{sM}\mathbf{0}}) = \frac{a \cdot ae}{2} \sin u.$$

Also,

$$2\text{Area}(\tilde{\Omega}_{t_0,t}) = a^2(u - e \sin u). \quad (11.3)$$

Zweitens bemerken wir, dass

$$\tilde{\Omega}_{t_0,t} = L(\Omega_{t_0,t}),$$

wobei $L : \alpha_{\mathbf{r}} \rightarrow \alpha_{\mathbf{r}}$ die lineare Abbildung definiert durch

$$L(x_1\hat{\mathbf{e}} + x_2\hat{\mathbf{i}}) = x_1\hat{\mathbf{e}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-e^2}}\hat{\mathbf{i}}$$

ist und $\Omega_{t_0,t}$ die von der Kurve \mathbf{r} im Zeitintervall $[t_0, t]$ überstrichene Region darstellt. Tatsächlich haben wir $L(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$, $L(\mathbf{r}) = \mathbf{s}$ und alle die Punkte auf der Hauptachse von \mathcal{E} bleiben fest. Da L eine Streckung von Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ in Richtung $\hat{\mathbf{i}}$, werden auch die Flächeninhalte durch die Abbildung L von einem Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ vergrößert. Also,

$$2\text{Area}(\tilde{\Omega}_{t_0,t}) = 2\text{Area}(L(\Omega_{t_0,t})) = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\text{Area}(\Omega_{t_0,t}) = \frac{c(t-t_0)}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{a\mu}(t-t_0).$$

Das Vergleichen dieser letzten Gleichung mit (11.3) liefert die Kepler-Gleichung. Wir gewinnen auch eine geometrische Interpretation der mittleren Anomalie als

$$\text{Area}(\tilde{\Omega}_{t_0,t}) = \frac{a^2}{2}M(t).$$

11.3 Der Fall $c = 0$

Wir möchten nun die Lösungen \mathbf{r} mit $c = 0$ betrachten. Der Inhalt des nächsten Satzes ist, dass wir die Kurve \mathbf{r} kriegen, wenn wir im letzten Satz $a > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und die Richtung \mathbf{e} fest halten aber lassen wir e gegen 1 gehen.

Satz 11.3. *Es seien $a > 0$, $\hat{\mathbf{e}} \in S^2$ und $t : 0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir definieren $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ als die Kurve*

$$\mathbf{r}(t) = a(\cos u(t) - 1)\hat{\mathbf{e}}, \quad (11.4)$$

wobei $u(t)$ die einzige Lösung der Gleichung

$$u - \sin u = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0), \quad u \in \mathbb{R} \quad (11.5)$$

ist. Dann $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein monoton wachsender Homöomorphismus mit $u(t_0 + kp) = 2\pi k$ und $\dot{u}(t_0 + kp) = +\infty$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, die glatt auf $\mathbb{R} \setminus (t_0 + p\mathbb{Z})$ ist. Außerdem, für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist die Einschränkung von \mathbf{r} auf das Intervall $(t_0 + kp, t_0 + (k+1)p)$ die maximale Lösung von (9.1) mit $h = -\mu/(2a)$, Exzentrizitätsvektor $\hat{\mathbf{e}}$ und $r(t_0 + kp + p/2) = 2a$.

Beweis. Wir definieren die Funktion $u \mapsto t(u) = t_0 + \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(u - \sin u)$. Die Funktion ist streng monoton wachsend mit $\frac{dt}{du}(u) \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $u \in 2\pi\mathbb{Z}$. Daraus folgt die Existenz einer Umkehrfunktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die glatt außerhalb der Punkten $t_0 + kp$ ist, wo $u(t_0 + kp) = 2\pi k$ und $\dot{u}(t_0 + kp) = +\infty$. Das impliziert, dass $u(t)$ die einzige Lösung von (11.5) ist.

Es sei nun $\mathbf{r} : (t_0 + kp, t_0 + (k+1)p) \rightarrow -\mathbb{R}^+ \hat{\mathbf{e}}$ die maximale Lösung mit $h = -\mu/a$ und $r(t_0 + kp + p/2) = 2a$. Um die Notation zu vereinfachen, betrachten wir nur den Fall $t_0 = 0$ und $k = 0$. Die Erhaltung der Energie lautet

$$\dot{r}^2 = \frac{\mu}{ar}(2a - r). \quad (11.6)$$

Wir definieren die Kurve

$$\mathbf{s} : (0, p) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{s}(t) := \left(1 - \frac{r}{a}, \sqrt{\frac{1}{a\mu}} r \dot{r}\right).$$

Wir berechnen die Norm von \mathbf{s} mit Hilfe von (11.6):

$$s^2 = \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 + \frac{r^2 \dot{r}^2}{a\mu} = 1 - 2\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2} + \frac{r(2a - r)}{a^2} = 1.$$

Daraus folgt, dass es eine glatte Abbildung $w : (0, p) \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $\mathbf{s} = (\cos w, \sin w)$ und $w(p/2) = \pi$. Wir berechnen die Ableitung von w :

$$\dot{w} = \langle \dot{\mathbf{s}}, \mathbf{i} \cdot \mathbf{s} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a\mu}} \left(\left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(\dot{r}^2 - \frac{\mu}{r}\right) + \frac{r\dot{r}^2}{a} \right) = \frac{1}{\sqrt{a\mu}} \left(\frac{\mu}{a} + \dot{r}^2 - \frac{\mu}{r} \right) = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \frac{1}{r}$$

Insbesondere ist w monoton steigend. Da $\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}(p) = (1, 0)$ leiten wir $w(0) = 0$ und $w(p) = 2\pi$. Außerdem gilt nach der Definition $r = a(1 - \cos w)$. Deswegen, wenn wir die letzte Gleichung von 0 bis t integrieren, erhalten wir

$$w(t) - \sin w(t) = \sqrt{\frac{\mu}{a}} t.$$

Das heißt, dass $w(t)$ die Kepler-Gleichung löst. Daher $w(t) = u(t)$ und der Satz ist vollständig bewiesen. \square

Definition 11.4. Eine Kurve $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, die die Gleichungen (11.1) und (11.2) oder die Gleichungen (11.4) und (11.5) erfüllt, heißt eine **regularisierte Lösung** des keplerschen Problems.