4 Konservative Kräfte und zentrale Kräfte 26.4.

Wir führen nun eine besondere Klasse von Kräften $\mathbf{F}$, die ein erstes Integral besitzen, das ein besseres Verhalten der Lösungskurven von $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ garantiert.

4.1 Konservative Kräfte

Definition 4.1. Eine Kraft $\mathbf{F} : \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ heißt konservativ, wenn

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - \operatorname{grad} U(\mathbf{r}), \tag{4.1}$$

wobei $U : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, das sogenannte Potential, und $\mathbf{A} : \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k \to A(k)$ ein Feld von antisymmetrischen Matrizen sind. Die zugehörige Energiefunktion $E : \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + U(\mathbf{r}).$$

Aufgabe 4.2. *Es sei $\mathbf{F} : \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ eine konservative Kraft. Es sei $\mathbf{r}_0$ ein Punkt in $\mathscr{R}$ und $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathscr{R}$ eine konstante Kurve $\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{r}_0$. Finden Sie hinreichende und notwendige Bedingungen auf $\mathbf{r}_0$, so dass $\mathbf{r}$ eine Lösung von $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ ist.*

Satz 4.3. *Wenn $\mathbf{F} : \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ eine konservative Kraft ist, ist dann die zugehörige Energiefunktion ein erstes Integral für die Gleichung $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.*

Beweis. Wir rechnen

$$\operatorname{grad} E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} U(\mathbf{r}) \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

Daher,

$$\langle \operatorname{grad} E(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \end{pmatrix} \rangle = \langle \operatorname{grad} U(\mathbf{r}), \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - \operatorname{grad} U(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \rangle$$

und der letzte Term verschwindet, denn $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ist antisymmetrisch. Die Aussage folgt jetzt aus Satz 3.14. $\square$

Für konservative Kräfte sind dann die Niveaumenge $E^{-1}(h)$ invariant für jede $h \in \mathbb{R}$. Genauere Informationen gewinnen wir, wenn wir die sogenannten Hillsregionen betrachten. Die sind definiert als

$$U^{\leq h} := \{\mathbf{r} \in \Omega \mid U(\mathbf{r}) \leq h\}, \qquad h \in \mathbb{R}.$$

Satz 4.4. *Es seien $\mathbf{F}$ eine konservative Kraft und $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k$. Es gilt*

$$\mathbf{r}_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0}(t) \in U^{\leq E(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)}, \qquad \forall\, t \in I_{(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)}.$$

Insbesondere, wenn $h \in \mathbb{R}$ und $U_*^{\leq h}$ eine zusammenhängende Komponente von $U^{\leq h}$ ist, ist

$$\left(U_*^{\leq h} \times \mathbb{R}^k\right) \cap E^{-1}(h)$$

eine invariante Menge.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus $E(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) = \frac{1}{2}|v_0|^2 + U(\mathbf{r}_0) \geq U(\mathbf{r}_0)$. Es sei nun $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \big(U_*^{\leq h} \times \mathbb{R}^k\big) \cap E^{-1}(h)$ und betrachte man die maximale Lösung $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} : I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} \to \mathscr{R}$. Für alle $t \in I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}$ gilt $E(\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t), \dot{\mathbf{r}}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t)) = h$ und die erste Aussage impliziert daher $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t) \in U^{\leq h}$. Für alle $T \in I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}$ verbindet dann die Kurve $t \mapsto \mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t),\ t \in [0, T]$ den Punkt $\mathbf{r}_0$ mit dem Punkt $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(T)$ innerhalb $U^{\leq h}$. Es folgt daraus, dass $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(T) \in U^{\leq h}$ wie gewünscht. □

Die Existenz der Energiefunktion impliziert die folgenden zwei verbesserten Versionen der Sätze 3.9 und 3.10. Insbesonder sollte man den ersten Satz hier unten mit Aufgabe 3.19 verglichen werden.

Satz 4.5. *Es sei* $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} : I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} \to \mathscr{R}$ *die maximale Lösung von* (4.1) *mit Anfang* $\mathbf{r}_0$ *und Anfangtangentenvektor* $\mathbf{v}_0$*. Es sei angenommen, dass* $\sup I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} < +\infty$*. Dann, für alle kompakten Teilmengen* K *von* $\mathscr{R}$ *existiert* $t_K \in I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}$ *so, dass* $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t) \notin K$ *für alle* $t \in (t_K, \sup I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)})$*. Eine ähnliche Aussage gilt, wenn* $\inf I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} > -\infty$*.*

Beweis. Wir setzen $h := E(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ und für jede kompakte Menge $K \subset \mathscr{R}$ definieren wir

$$K' = (K \times \mathbb{R}^k) \cap E^{-1}(h).$$

Wir zeigen, dass auch $K' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ kompakt ist. Es reicht zu beweisen, dass K' abgeschlossen und beschränkt ist. Die Menge K' ist abgeschlossen, weil $K \times \mathbb{R}^k$ und $E^{-1}(h)$ abgeschlossen sind. Zu zeigen, dass auch beschränkt ist, finden wir positive Konstanten C_1, C_2, sodass, wenn $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in K'$, dann $r \leq C_1$ und $v \leq C_2$. Da nach Definition $\mathbf{r} \in K$ gilt, ist die Existenz von C_1 unmittelbar. Nach der Definition von E bekommen wir

$$v = \sqrt{2(h - U(\mathbf{r}))} \leq \sqrt{2\big(h - \min_K U\big)} =: C_2.$$

Nach Satz 3.9 gibt es eine Zeit $t_{K'} \in I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}$ mit $(\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t), \dot{\mathbf{r}}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t)) \notin K'$ für alle Zeiten $t \in (t_{K'}, \sup I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)})$. Da $(\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t), \dot{\mathbf{r}}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t)) \in E^{-1}(h)$ folgt, dass $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t) \notin K$. Wir können $t_K := t_{K'}$ nehmen und der Satz ist bewiesen. □

Satz 4.6. *Es sei* $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k$ *mit* $h := E(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$*. Wir nehmen an, dass der abgeschlossene Ball* $\bar{B}_a(\mathbf{r}_0)$ *mit Mittelpunkt* $\mathbf{r}_0 \in \Omega$ *und Radius* a *in* $\mathscr{R}$ *enthalten ist. Dann gilt*

$$I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} \supset [-\delta, \delta], \qquad \delta := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{h - \min\limits_{\bar{B}_a(\mathbf{r}_0)} U}}.$$

Beweis. Wenn $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t) \in \bar{B}_a(\mathbf{r}_0)$ für alle $t \in I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} \cap [0, +\infty)$ dann $[0, +\infty) \subset I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}$ nach dem Satz (4.5). Es sei dann angenommen, dass

$$T := \inf\big\{t \in I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} \cap [0, +\infty) \mid \mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t) \notin \bar{B}_a(\mathbf{r}_0)\big\} \in I_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)} \cap (0, +\infty).$$

Dann $|\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(T) - \mathbf{r}_0| = a$ und $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t) \in \bar{B}_a(\mathbf{r}_0)$ für jede $t \in [0,T]$. Nach dem Fundamentalsatz der Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned} a = |\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(T) - \mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(0)| = \left| \int_0^T \dot{\mathbf{r}}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t)\mathrm{d}t \right| &\leq \int_0^T |\dot{\mathbf{r}}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t)|\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \sqrt{2}\sqrt{h - U(\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}(t))}\mathrm{d}t \\ &\leq T\sqrt{2}\sqrt{h - \min_{\mathbf{r}\in\bar{B}_a(\mathbf{r}_0)} U(\mathbf{r})}. \end{aligned}$$

□

Wir lassen nun für wenige Augenblicke die Welt der konservativen Kräfte und fokussieren uns auf eine Klasse von Kräften, die uns helfen, das keplersche Problem zu lösen.

4.2 Zentralkräfte

Wir betrachten eine Kraft $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3_\times \to \mathbb{R}^3$ der Art

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{r}},$$

wobei $f : \mathbb{R}^3_\times \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist. Also, die Kraft $\mathbf{F}$ ist entlang der Verbindungslinie zwischen $\mathbf{0}$ und dem Körper im Punkt $\mathbf{r}$ gerichtet.

Definition 4.7. Der Drehimpuls um $\mathbf{0}$ ist die Vektorfunktion

$$\mathbf{c} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

Wenn $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve ist, lässt sich ihr Drehimpuls auf folgender Weise schreiben:

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) = \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Aufgabe 4.8. *Nach Satz* 4.11 *können wir ein Koordinatensystem so wählen, dass Es sei* $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), 0)$ *eine Kurve, die in der Ebene* $\{z = 0\}$ *enthalten ist und seien* $t \mapsto (r(t), \theta(t))$ *die Polarkoordinaten für die Kurve* $t \mapsto (x(t), y(t))$. *Es gilt die Formel*

$$\mathbf{c} = (0, 0, r^2\dot{\theta}).$$

Satz 4.9. *Es sei* $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ *ein Element von* $\mathbb{R}^3_\times \times \mathbb{R}^3$. *Es gilt*

$$(i)\ \ \langle \mathbf{c}, \mathbf{r} \rangle = 0, \qquad (ii)\ \ \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{r}} \rangle\, \hat{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{c}}{r} \times \hat{\mathbf{r}}, \qquad (iii)\ \ v^2 = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{r}} \rangle^2 + \frac{c^2}{r^2}.$$

Es sei nun $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3_\times$ *eine Kurve und setze man* $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}}$. *Dann*

$$(iv)\ \ \dot{r} = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{r}} \rangle, \qquad (v)\ \ \dot{\hat{\mathbf{r}}} = \frac{\mathbf{c} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

Lösung. Da $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ senkrecht zu $\mathbf{r}$ und $\mathbf{v}$ ist, folgt es, dass $\langle \mathbf{c}, \mathbf{r} \rangle = 0$. Die Formel (*ii*) ist klar, wenn $\hat{\mathbf{r}}$ und $\mathbf{v}$ parallel sind. Falls sie nicht parallel sind, bilden $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{r}}$ eine positive orthonormale Basis des $\mathbb{R}^3$. Wir berechnen die Koeffizienten von $\mathbf{v}$ in dieser Basis

$$\langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{c}} \rangle = 0, \qquad \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{r}} \rangle = \frac{1}{cr} \langle \mathbf{v}, (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{cr} \langle \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rangle = \frac{c}{r}.$$

Die Formel (*iii*) folgt nun unmittelbar aus (*ii*), weil $\hat{\mathbf{r}}$ und $\mathbf{c} \times \hat{\mathbf{r}}$. Für (*iv*) berechnen wir

$$\langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{r}} \rangle = \frac{1}{r} \langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{2r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{2r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r^2 = \frac{2r\dot{r}}{2r} = \dot{r}.$$

Formel (*v*) folgt aus (*ii*) und (*iv*):

$$\frac{\mathbf{c} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{r\dot{\mathbf{r}} - \dot{r}\mathbf{r}}{r^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \dot{\hat{\mathbf{r}}}.$$

□

Aufgabe 4.10. *Es sei* $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3_\times$ *eine Kurve mit* $\dot{\mathbf{c}}(t) = 0$ *für alle* $t \in I$. *Dann*

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} \right) \hat{\mathbf{r}}.$$

Satz 4.11. *Der Drehimpuls* $\mathbf{c}$ *ist ein erstes Integral für* $\ddot{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, *wenn* $\mathbf{F}$ *zentral ist. Außerdem, wenn eine Lösung* $\mathbf{r}$ *einen Drehimpuls* $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ *besitzt, liegt dann* $\mathbf{r}$ *auf der Ebene, die senkrecht zu* $\mathbf{c}$ *ist und durch* $\mathbf{0}$ *läuft. Wenn* $\mathbf{r}$ *einen Drehimpuls* $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ *besitzt, liegt* $\mathbf{r}$ *auf einer Halbgerade aus* $\mathbf{0}$. *Das heißt, dass es* $\mathbf{u}_0 \in S^2$ *gibt mit der Eigenschaft* $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_0$ *und* $\ddot{r} = -f(r\mathbf{u}_0)$.

Beweis. Wir benutzen Satz 3.14:

$$\mathrm{d}_{(\mathbf{r},\mathbf{v})}\mathbf{c} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 - f(\mathbf{r})\, \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} = 0.$$

Es sei nun $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ eine Lösung von $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ mit $\mathbf{c}(t) \equiv \mathbf{c}_0$. Wenn $\mathbf{c}_0 \neq 0$, gehört $\mathbf{r}$ zur Ebene $\{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{s}, \mathbf{c}_0 \rangle = 0\}$ nach Satz 4.9.(i). Wenn $\mathbf{c}_0 = 0$, haben wir $\dot{\hat{\mathbf{r}}} = 0$ nach Satz 4.9.(iii). Also $\hat{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{u}_0 \in S^2$, wie gewünscht. □

Satz 4.12 (Zweites keplersches Gesetz)**.** *Es sei* $\mathbf{r}$ *eine Lösung von* $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, *wobei* $\mathbf{F}$ *eine Zentralkraft ist. Der Vektor* $\mathbf{r}$ *überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Fläche.*

Beweis. Die Aussage ist klar, wenn $\mathbf{c} = 0$. Wenn $\mathbf{c} \neq 0$, wählen wir ein Koordinatensystem so, dass $\mathbf{c} = (0, 0, c)$ mit $c > 0$. Dann $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ und $c = r^2\dot{\theta}$. Insbesondere ist θ eine monoton wachsende Funktion der Zeit t. Es seien $t_1 < t_2$ beliebig mit $\theta(t_2) - \theta(t_1) < 2\pi$ und man definiere $\Omega_{t_1,t_2} = \{s\mathbf{r}(t) \mid s \in [0,1],\ t \in [t_1, t_2]\}$. Nach dem Satz 2.3 gilt

$$\mathrm{Area}(\Omega_{t_1,t_2}) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} c \, \mathrm{d}t = \frac{c}{2} \cdot (t_2 - t_1).$$

Also, der Flächeinhalt von Ω_{t_1,t_2} hängt von t_1 oder t_2 nur durch ihre Differenz ab. □