18 Satz von Osipov-Belbruno für $h = 0$ 25.6.

Der Satz von Moser stellt eine Verbindung zwischen Bahnen mit negativer Energie und der sphärischen Geometrie, wo die Großkreise die selbe Rolle wie die Geraden in der euklidischen Geometrie spielen. Wir sehen nun, dass eine derartige Verbindung zwischen Bahnen mit Energie null und der euklidischen Geometrie besteht.

Satz 18.1 (Osipov-Belbruno; $h = 0$)**.** *Die positive Inversion $I_*^+ : \bar{\mathbb{R}}^3 \to \bar{\mathbb{R}}^3$ an der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ gibt eine Bijektion zwischen den Hodographen $\mathbf{v}$ mit $h = 0$ un den Geraden in $\mathbb{R}^3$. Wenn $\mathbf{v}$ nach $w := u/\sqrt{\mu}$ parametrisiert ist, wobei u die exzentrische Anomalie darstellt, dann ist die Gerade nach der halben Bogenlänge parametrisiert.*

Beweis der ersten Aussage im Satz 18.1. Nach dem Satz 13.10 parametrisieren die Hodographe $\mathbf{v}$ mit $h = 0$ die Bogen $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}} = \mathcal{C}_\mathbf{r} \backslash \{\mathbf{0}\}$, wobei $\mathcal{C}_\mathbf{r}$ ein Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{M}_\mathbf{r} = \frac{\mu}{c}\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}$ und Radius $\rho_\mathbf{r} = \frac{\mu}{c}$, falls $c \neq 0$. Wenn $c = 0$, dann ist $\mathcal{C}_\mathbf{r} = \bar{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{e}$ die erweiterte Gerade durch $\mathbf{0}$ in Richtung $\mathbf{e}$. Aus die Formel 16.1 im Satz 16.1 ist das Bild von $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}}$ durch die Inversion, falls $c \neq 0$, die Gerade

$$I_*^+(\mathcal{B}_{\mathcal{C}_\mathbf{r}}) = \mathbb{R} \cdot \mathbf{e} + \frac{c}{2\mu}\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}$$

und die Formel gilt auch für $c = 0$. Wenn $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{e} \in S^2$ mit $\langle \mathbf{c}, \mathbf{e} \rangle = 0$ beliebig sind, bekommen wir alle die möglichen Geraden des $\mathbb{R}^3$. Die Geraden durch $\mathbf{0}$ entsprechen genau den Hodographen mit $c = 0$. □

Um die zweite Aussage in dem obigen Satz zu beweisen, müssen wir zuerst die exzentrische Anomalie definieren.

Es sei $\mathcal{P} \subset \alpha$ eine Parabel in einer Ebene $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ mit Exzentrizitätsvektor $\mathbf{e}$, Brennpunkt in $\mathbf{0}$ und Abstand d zwischen Brennpunkt und Leitlinie. Es sei $\mathcal{P}' \subset \alpha$ die Parabel mit Periapsis $\mathbf{r}_{\min}$ und Exzentrizitätsvektor $\mathbf{e}$ wie die von $\mathcal{P}$ aber mit Abstand 1 zwischen Brennpunkt und Leitlinie.

Definition 18.2. Wenn $\mathbf{r} \in \mathcal{P}$, definieren wir $\mathbf{s} \in \mathcal{P}'$ als der Punkt in $\mathcal{P}'$ dessen Lot auf der Gerade $\mathbb{R} \cdot \mathbf{e}$ die Parabel $\mathcal{P}$ im Punkt $\mathbf{r}$ schneidet. Die exzentrische Anomalie $u \in \mathbb{R}$ von $\mathbf{r}$ ist die Länge des Lots mit Vorzeichen.

Wir nehmen Koordinaten $(x, y) \mapsto x\mathbf{e} + y\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}$ auf α. Wenn $\mathbf{r} = (x, y)$, haben wir $\mathbf{s} = (x, u)$. Wir finden nun die Gleichungen für $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$ mit Hilfe vom Satz 8.1. Wir haben $x^2 + y^2 = (d - x)^2$, die wir als

$$x = \frac{d}{2} - \frac{1}{2d}y^2$$

umschreiben. Die Parabel $\mathcal{P}'$ hat Brennpunkt $(d/2 - 1/2, 0)$ und daher $(x + 1/2 - d/2)^2 + u^2 = (1 - x - 1/2 + d/2)^2$. Wir multiplizieren aus und finden

$$x = \frac{d}{2} - \frac{1}{2}u^2.$$

Das heißt, dass die Streckung $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(x,y) = (x, y/\sqrt{d})$ die Parabel $\mathcal{P}$ auf die Parabel $\mathcal{P}'$ und den Punkt $\mathbf{r}$ auf den Punkt $\mathbf{s}$ bringt. Also, kommen wir zum folgenden Ergebnis.

Hilfsatz 18.3. *Der Punkt $\mathbf{r} \in \mathcal{P}$ lässt sich als Funktion der exzentrischen Anomalie auf folgender Weise ausdrücken:*

$$\mathbf{r} = \Big(\frac{d}{2} - \frac{1}{2}u^2\Big)\mathbf{e} + \sqrt{d}u\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}.$$

Wir können nun die Kepler-Gleichung für die exzentrische Anomalie beweisen.

Satz 18.4. *Es sei $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine regularisierte Lösung des keplerschen Problems mit $h = 0$. Wenn $u(t)$ die exzentrische Anomalie des Punktes $\mathbf{r}(t)$ ist, gilt*

$$\frac{u(t)^3}{6} + \frac{c^2}{2\mu}u(t) = \sqrt{\mu}(t - t_0), \tag{18.1}$$

wobei t_0 der Periapsisdurchgang darstellt.

Beweis. Wenn $c \neq 0$ beschreibt $\mathbf{r}$ eine Parabel $\mathcal{P}$ mit $d = c^2/\mu$ nach der Gleichung (9.5). Es sei $\Omega_{t_0,t}$ die von der Bahn im Zeitintervall $[t_0, t]$ überstrichene Region. Dann $\mathrm{Area}(\Omega_{t_0,t}) = \frac{c}{2}(t - t_0)$ nach dem Satz 2.3. Außerdem gilt

$$\mathrm{Area}(\sigma(\Omega_{t_0,t})) = \frac{\sqrt{\mu}}{c}\frac{c}{2}(t - t_0) = \frac{\sqrt{\mu}}{2}(t - t_0).$$

Aber die Region $\sigma(\Omega_{t_0,t})$ ist auch die disjunkte Vereinigung des Dreiecks $\Delta(\mathbf{r}_{\min}\mathbf{0}\mathbf{s})$ und des Parabelsektor von $\mathcal{P}'$ zwischen $\mathbf{r}_{\min}$ und $\mathbf{s}$. Das Dreieck hat Flächeinhalt $\frac{1}{2}\frac{d}{2}u(t)$ während das Sektor hat Flächeninhalt $\frac{u^3(t)}{12}$, wie folgt aus einer direkten Integrierung oder aus dem Parablesatz von Archimedes. Die Gleichung zwischen der Summe dieser Flächeninhälte und dem Flächeinhalt von $\sigma(\Omega_{t_0,t})$ ist genau die Gleichung in (21.2). □

Beweis der zweiten Aussage im Satz 18.1. Aus der Kepler-Gleichung gewinnen wir

$$\dot{u} = \frac{2\sqrt{\mu}}{u^2 + \frac{c^2}{\mu}}.$$

Die Kettenregel gibt uns

$$\mathbf{v} = \dot{u}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u} = \frac{2\sqrt{\mu}}{u^2 + \frac{c^2}{\mu}}\Big(- u\,\mathbf{e} + \frac{c}{\sqrt{\mu}}\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}\Big).$$

Wir haben $v^2 = 4\mu(u^2 + \frac{c^2}{\mu})^{-1}$, sodass, wenn $w = u/\sqrt{\mu}$,

$$I_*^+(\mathbf{v}(w)) = \frac{\mathbf{v}(w)}{v^2(w)} = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\Big(- u\,\mathbf{e} + \frac{c}{\sqrt{\mu}}\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}\Big) = \Big(- \frac{w}{2}\,\mathbf{e} + \frac{c}{2\mu}\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}\Big).$$

Das ist genau eine Parametrisierung der Gerade $\mathbb{R} \cdot \mathbf{e} + \frac{c}{2\mu}\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}$ mit Geschwindigkeit $1/2$. □