10 Die Dynamik des keplerschen Problems 24.5.

Satz 10.1. *Es sei* $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3_\times$ *eine maximale Lösung von* (9.1) *mit* $\mathbf{r}(t) = -r(t)\mathbf{e}$. *Es sei angenommen, dass* $h \geq 0$. *Wenn* $\dot{r}(0) > 0$, *dann* r *ist monoton steigend, und*

$$I = (-t_0, +\infty), \qquad \lim_{t \to -t_0} r(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} r(t) = \infty.$$

Wenn $\dot{r}(0) < 0$, *dann* r *ist monoton fallend und*

$$I = (-\infty, t_0), \qquad \lim_{t \to t_0} r(t) = 0, \qquad \lim_{t \to -\infty} r(t) = \infty$$

Es sei angenommen, dass $h < 0$. *Dann* $2a := \max r(t) = -\mu/h$. *Wenn* $r(0) = 2a$, *dann* $I = (-p/2, p/2)$, *wobei*

$$p^2 := \frac{4\pi^2}{\mu}a^3, \qquad \lim_{t \to \pm p/2} r(t) = 0.$$

Beweis. Alle die Aussage folgen aus dem Hilfsatz 6.1 und der Tatsache, dass $U(r) = -\mu/r$. Wir müssen nur p für $h < 0$ berechnen. Also

$$\begin{aligned}
\frac{p}{2} = \int_{-\frac{p}{2}}^{0} \mathrm{d}t = \int_0^{2a} \frac{1}{\dot{r}}\mathrm{d}r = \int_0^{2a} \frac{1}{\sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}}}\mathrm{d}r &= \frac{\sqrt{2a}\,2a}{\sqrt{2\mu}} \int_0^1 \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{1-s}}\mathrm{d}s \\
&= 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\cos u} 2\sin u \cos u \mathrm{d}u \\
&= 4\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \mathrm{d}u \\
&= 4\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

□

Folgerung 10.2. *Es seien* $h \in \mathbb{R}$ *und* $\mathbf{e} \in S^2$. *Bis auf Zeitverschiebung gibt es genau eine Lösung des keplerschen Problems mit verschwindendem Drehimpuls, Energie* h *und Exzentrizitätsvektor* $\mathbf{e}$.

Beweis. Wir nehmen eine Lösung mit Anfangsbedingungen $\mathbf{r}_0 = -r_0\mathbf{e}$ und $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}$, so dass r_0 und v_0 der Gleichung

$$h = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r_0}$$

genügen. Die Eindeutigkeit bis auf Zeitverschiebung folgt aus Satz 10.1. □

Satz 10.3. *Die maximale Lösungen von* (9.1) *mit* $c > 0$ *sind für alle reelle Zeiten definiert. Der ganze Kegelschnitt ist in einem Sinn gelaufen und, falls der Kegelschnitt eine Ellipse ist, die Bewegung besitzt eine gewissene minimale Periode* $p > 0$. *Die ist die Umlaufzeit, d. h. die Zeit, in der die Bahn eine vollständige Umrundung zum* $\mathbf{0}$ *vollführt. In einer Formel,* $\theta(p) = \theta(0)2\pi$, *wobei* θ *die Winkelkoordinate der Bahn ist.*

Beweis. Das Potential $\tilde{U}(r) = -\mu/r$ genügt den Bedingungen $(i)'$ und $(ii)'$ in der Folgerung 5.8. Daher ist das Existenzintervall für Bahnen mit $\mathbf{c} \neq 0$ das ganze $\mathbb{R}$. Es seien nun (r, θ) die Polarkoordinaten der Bahn und $\mathbf{c} = (0, 0, c)$ mit $c > 0$. Da $\cdot\theta = c/r^2$, folgt es, dass die Bahn läuft in einem festen Sinn. Es sei nun angenommen, dass die Bahn auf einer Parabel oder einer Hyperbel läuft. In diesem Fall ist $h \geq 0$ und $\tilde{U}_c^{\leq h} = [r_0, +\infty)$, wobei $\frac{\mathrm{d}\tilde{U}_c}{\mathrm{d}r}(r_0) < 0$, denn $\tilde{U}_c$ besitzt nur ein negatives Minimum als kritischen Punkt. Dann divergiert die radiale Koordinate der Bahn für $t \to \pm\infty$ nach Satz (6.2) und deswegen wird die ganze Parabel oder Hyperbel begangen. Wenn sich die Bahn auf einer Ellipse befindet, ist die radiale Koordinate nach oben beschränkt und somit die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ nach unten von einer positiven Zahl beschränkt. Das heißt, dass es $p \in \mathbb{R}^+$ gibt mit $\theta(p) = \theta(0) + 2\pi$. Aus (8.7) folgt es, dass $r(p) = r(0)$ gilt. Daher bekommen wir auch $\dot{\theta}(p) = \dot{\theta}(0)$. Wir leiten nun (8.7) nach t ab:

$$\dot{r} = -\frac{de \sin\theta}{(1 - e\cos\theta)^2}\dot{\theta}.$$

Deswegen gilt auch $\dot{r}(p) = \dot{r}(0)$. Nach Satz 3.5 gewinnen wir die Gleichung $\mathbf{r}(t + p) = \mathbf{r}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Zahl p ist die minimale Periode, weil $\dot{\theta}$ positiv ist. □

Folgerung 10.4. *Es seien* $\mathbf{c}$ *und* $\mathbf{e}$ *zwei Vektoren des* $\mathbb{R}^3$*, sodass* $\mathbf{c} \neq 0$ *und* $\langle \mathbf{e}, \mathbf{c} \rangle = 0$*. Bis auf Zeitverschiebung gibt es genau eine Lösung des keplerschen Problems, die Drehimpuls* $\mathbf{c}$ *und Exzentrizitätsvektor* $\mathbf{e}$ *besitzt. Äquivalent: für alle orientierten Kegelschnitte* $\mathcal{K}$ *mit Brennpunkt in* $\mathbf{0}$ *gibt es genau eine Lösung des keplerschen Problems bis auf Zeitverschiebung, das* $\mathcal{K}$ *parametrisiert.*

Beweis. Wir bemerken, dass $\hat{\mathbf{c}}$, $\hat{\mathbf{e}}$ und $\hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{e}}$ eine positive orthonormale Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Wir nehmen eine Lösung mit Anfangsbedingungen $\mathbf{r}_0 = r_0\hat{\mathbf{e}}$ und $\mathbf{v}_0 = v_0\hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{e}}$, so dass

$$r_0 = \frac{c^2}{\mu(1 + e)}, \qquad v_0 = \frac{\mu}{c}(1 + e).$$

Es folgt daraus, dass $c = r_0 v_0$ und $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 = (r_0 v_0)\hat{\mathbf{e}} \times (\hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{e}}) = c\,\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$. Außerdem,

$$\hat{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{\mu}\mathbf{c} \times \mathbf{v}_0 = \hat{\mathbf{e}} + \frac{cv_0}{\mu}\hat{\mathbf{c}} \times (\hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{e}}) = \Big(1 - \frac{cv_0}{\mu}\Big)\hat{\mathbf{e}} = -e\,\hat{\mathbf{e}} = -\mathbf{e}.$$ □

Die Eindeutigkeit bis auf Zeitverschiebung folgt, wenn wir das Argument für die Existenz der Periode im Satz 10.3 entsprechend anpassen.

Folgerung 10.5 (Drittes keplersche Gesetz)**.** *Für elliptische Lösungen des keplerschen Problems sind die minimale Periode* p *und die große Halbachse* a *durch die folgende Gleichung verbunden*

$$\frac{p^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}. \tag{10.1}$$

Beweis. Die kleine Halbachse der Ellipse ist gleich $\sqrt{1 - e^2}a$. Deswegen der Flächeninhalt der Ellipse beträgt $\pi\sqrt{1 - e^2}a^2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $\dot{\theta} > 0$ an, und wir wenden Satz 2.3 mit $\theta_0 \to 0$ und $\theta_1 \to 2\pi$. Daher,

$$\pi\sqrt{1 - e^2}a^2 = \frac{c}{2}p.$$

Wir substituieren in diese Gleichung c aus der Formel $c = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$ von (9.9) und die gewünschte Identität folgt. $\square$

Genauere Informationen über die Zeitparametrisierung gewinnen wir, indem wir eine neue Variabel für die Beschreibung der Bahn einführen. Unten werden wir nur den Fall $h < 0$ explizit bearbeiten. Der Fall $h \geq 0$ wird am Ende ohne Beweis gegeben werden.

Definition 10.6. Es sei $\mathcal{E} \subset \alpha$ eine Ellipse mit Brennpunkt in $\mathbf{0}$, Exzentrizitätsvektor $\mathbf{e} \in \alpha$ und große Halbachse a. Es sei $\mathbf{r} \in \mathcal{E}$. Der Winkel f zwischen der Halbgerade $\mathbb{R}^+\mathbf{e}$ und $\mathbf{r}$ ist die sogenannte wahre Anomalie, sodass

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos f}.$$

Wir betrachten nun den Kreis $\mathcal{C} \subset \alpha$ mit Durchmesser gleich der Hauptachse von $\mathcal{E}$ und schreiben $\mathbf{M}$ für seinen Mittelpunkt. Es sei $\mathbf{s}$ der einzige Punkt auf $\mathcal{C}$ so, dass das Lot auf der Hauptachse durch $\mathbf{s}$ schneidet die Ellipse im Punkt $\mathbf{r}$. Der Winkel u zwischen der Halbgerade $\mathbf{M} + \mathbb{R}^+\mathbf{e}$ und $\mathbf{s}$ heißt die exzentrische Anomalie von $\mathbf{r}$. Der Punkt $\mathbf{r}_{\min} \in \mathcal{E}$, für den $u \in 2\pi\mathbb{Z}$ (äquivalent $f \in 2\pi\mathbb{Z}$) ist der Punkt mit minimalem Abstand von $\mathbf{0}$ und heißt Periapsis. Eine Zahl $t_0 \in \mathbb{R}$ heißt Periapsisdurchgang, wenn $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_{\min}$.

Hilfsatz 10.7. *Wir haben die Gleichung*

$$\mathbf{r} = a(\cos u - e)\hat{\mathbf{e}} + a\sqrt{1-e^2}\sin u\, \mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{e}}.$$

Beweis. Es ist genug die Formel zu zeigen, wenn α die xy-Ebene ist und $\mathbf{e} = (e, 0, 0)$. Wir haben die Gleichungen

$$\mathcal{E}: \quad (x+ae)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2, \qquad\qquad \mathcal{C}: \quad (x+ae)^2 + y^2 = a^2. \tag{10.2}$$

Deshalb Haben wir $\mathbf{s} = (x_\mathbf{s}, y_\mathbf{s}) = a(\cos u - e, \sin u)$. Wenn $\mathbf{r} = (x_\mathbf{s}, y_\mathbf{s})$, dann $x_\mathbf{r} = x_\mathbf{s}$ und aus (10.2) folgt $y_\mathbf{r} = \sqrt{1-e^2} y_\mathbf{s}$, wie gewünscht. $\square$