9 Das keplersche Problem 23.5

9.1 Das erste keplersche Gesetz

Es sei $\mu > 0$ und betrachte man eine Lösung des keplerschen Problems

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \tag{9.1}$$

mit Drehimpuls $\mathbf{c}$ und Energie h. Die Energie lautet

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r},$$

so, dass h eine beliebige reelle Zahl sein darf. Aus Satz 4.9 haben wir zusätzlich für $c > 0$

$$h \geq \min_{r \in \mathbb{R}^+} \left(\frac{c^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} \right) = \tilde{U}_c \left(\frac{c^2}{\mu} \right) = -\frac{\mu^2}{2c^2} \tag{9.2}$$

und die Gleicheit gilt genau dann, wenn $\mathbf{r}$ eine Kreisbahn ist.

Satz 4.9 liefert auch mit Hilfe von (9.1)

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{c}}{\mu} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathbf{c}}{\mu} \times \mathbf{r}\Big).$$

Also, gibt es $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$, den sogenannten Exzentrizitätsvektor, mit

$$\hat{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{c}}{\mu} \times \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{e}. \tag{9.3}$$

Wenn $\mathbf{c} = 0$, dann $\hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{e}$. Also, $e = 1$ und die Bewegung erfolgt auf der Halbachse $-\mathbb{R}^+\mathbf{e}$. Wenn $\mathbf{c} \neq 0$ ist die Bewegungsebene $\alpha_{\mathbf{r}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle = 0\}$ wohl definiert. Aus der obigen Gleichung folgt es, dass $\langle \mathbf{e}, \mathbf{c} \rangle = 0$ so, dass sich $\mathbf{e}$ auf $\alpha_{\mathbf{r}}$ befindet. Wir kennzeichnen mit $\mathbf{i} : \alpha_{\mathbf{r}} \to \alpha_{\mathbf{r}}$ die Drehung um neunzig Graden, wie in der Formel (2.1). Die Gleichung (9.3) lässt sich als

$$\hat{\mathbf{r}} + \frac{c}{\mu}\mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{e} \tag{9.4}$$

schreiben. Diese Vektorgleichung (9.5) ist äquivalent zu den folgenden zwei Skalargleichungen. In der ersten nehmen wir das Skalarprodukt beider Seiten mit $\mathbf{r}$:

$$\langle \hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle + \frac{c}{\mu}\langle \mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle = -\langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad r - \frac{c^2}{\mu} = -\langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle,$$

wobei $\langle \mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle = -c$ wegen der Formel (4.2) und der Antisymmetrie von $\mathbf{i}$. Wir bekommen

$$r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle = d, \qquad d := \frac{c^2}{\mu}. \tag{9.5}$$

Das heißt, dass für $\mathbf{c} \neq 0$ die Kurve $\mathbf{r}$ dem Kegelschnitt $K(\mathbf{e}, d)$ gehört.

Satz 9.1 (Erstes keplersche Gesetz)**.** *Es sei* $\mathbf{r}$ *eine Lösung des keplerschen Problems* (9.1) *mit nicht verschwindendem Drehimpuls. Dann* $\mathbf{r}$ *läuft auf einem Kegelschnitt mit einem Brennpunkt in* $\mathbf{0}$. □

Die zweite Skalargleichung bekommen wir, indem wir die Norm von (9.5) nehmen:

$$|\hat{\mathbf{r}} + \frac{c}{\mu}\mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{r}}|^2 = e^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{c^2}{\mu^2}v^2 + 2\frac{c}{\mu r}\langle \mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle = e^2.$$

Da $\langle \mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle = -c$ leiten wir die Identität

$$2hc^2 = \mu^2(e^2 - 1). \tag{9.6}$$

her. Welche Art von Kegelschnitt hängt also aus dem Vorzeichen der Energie ab:

$$\left\{\begin{matrix} h < 0 & \Leftrightarrow & e < 1, \\ h = 0 & \Leftrightarrow & e = 1, \\ h > 0 & \Leftrightarrow & e > 1. \end{matrix}\right\} \tag{9.7}$$

Es seien nun die Mengen

$$M := \big\{(c,h) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; c > 0, \;\; 2c^2h \geq -\mu^2\big\}, \qquad N = \big\{(e,d) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; e \geq 0, \;\; d > 0\big\}$$

definiert. Es besteht eine Bijektion $M \to N$, die durch (9.5) und (9.6) gegeben ist:

$$\begin{cases} d = \dfrac{c^2}{\mu}, \\ e = \sqrt{1 + \dfrac{2hc^2}{\mu^2}}, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \quad c = \sqrt{\mu d}, \\ |h| = \mu\dfrac{e^2 - 1}{2d}, \end{cases} \tag{9.8}$$

sodass die Menge $\mathbb{R}^+ \times 0 \subset M$ auf die Menge $1 \times \mathbb{R}^+ \subset N$ abgebildet wird. Die Menge $N \setminus (1 \times \mathbb{R}^+)$ und $N' = \big\{(e,a) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; e \geq 0, \;\; e \neq 1, \;\; a > 0\big\}$ sind auch in Bijektion nach (8.6). Die Verkettungsbijektion liefert die folgende Bijektion $M \setminus (\mathbb{R}^+ \times 0) \to N'$

$$\begin{cases} a = \dfrac{\mu}{2|h|}, \\ e = \sqrt{1 + \dfrac{2hc^2}{\mu^2}}, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \quad c = \sqrt{\mu a|1 - e^2|}, \\ |h| = \dfrac{\mu}{2a}. \end{cases} \tag{9.9}$$