17 Satz von Moser: der Beweis 21.6.

Der Hauptsatz über Inversionen erlaubt uns auch zu bestimmen, welche Sphären invariant durch Inversionen sind.

Satz 17.1. *Eine radiale Sphäre $\mathcal{S} \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ bezüglich $\mathbf{M}_*$ ist invariant durch I_*^- genau dann, wenn*

$$\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = -\rho_*^2.$$

Das passiert genau dann, entweder wenn $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_*$ oder wenn für jede 2-Ebene α' mit $\mathbf{M}_* \in \alpha'$ die Kreise $\mathcal{S} \cap \alpha'$ und $\mathcal{S}_* \cap \alpha'$ sich orthogonal schneiden.

Beweis. Es sei $\mathcal{S} \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Sphäre. Wenn $\mathbf{M}_* \in \mathcal{S}$ gilt, ist das Bild von $\mathcal{S}$ eine Ebene nach Satz (16.1).(b) und deswegen kann $\mathcal{S}$ nicht invariant sein. Es sei nun angenommen, dass $\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = -\rho_*^2$. Aus (16.2) folgt es, dass $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$, also $I_*^-(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Es sei nun umgekehrt angenommen, dass $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$. Dann besitzen $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$ den gleichen Radius $\rho = \rho'$ und den gleichen Mittelpunkt $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$. Nach (16.2) haben wir,

$$\mathbf{M}' = -\frac{\rho_*^2}{\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_*) + \mathbf{M}_*, \qquad \rho' = \frac{\rho_*^2}{|\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)|}\rho.$$

Also, wenn $\mathbf{M} \neq \mathbf{M}_*$, dann folgt es aus der ersten Gleichung, dass $\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = -\rho_*^2$. Wenn $\mathbf{M} = \mathbf{M}_*$, dann $\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) < 0$ und aus der zweiten Gleichung folgt es nochmal, dass $\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = -\rho_*^2$. □

Satz 17.2. *Eine radiale Sphäre $\mathcal{S} \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ bezüglich $\mathbf{M}_*$, die nicht in $\mathcal{S}_*$ enthalten ist, ist invariant durch I_*^+ genau dann, wenn*

$$\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = \rho_*^2.$$

Das passiert genau dann, wenn für jede 2-Ebene α' mit $\mathbf{M}_* \in \alpha'$ die Kreise $\mathcal{S} \cap \alpha'$ und $\mathcal{S}_* \cap \alpha'$ sich orthogonal schneiden.

Beweis. Es sei $\mathcal{S} \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Sphäre. Wenn $\mathbf{M}_* \in \mathcal{S}$ gilt, ist das Bild von $\mathcal{S}$ eine Ebene nach Satz (16.1).(b) und deswegen kann $\mathcal{S}$ nicht invariant sein. Es sei nun angenommen, dass $\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = \rho_*^2$. Aus (16.2) folgt es, dass $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$, also $I_*^+(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Es sei nun umgekehrt angenommen, dass $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$. Dann besitzen $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$ den gleichen Radius $\rho = \rho'$ und den gleichen Mittelpunkt $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$. Nach (16.2) haben wir,

$$\mathbf{M}' = \frac{\rho_*^2}{\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_*) + \mathbf{M}_*, \qquad \rho' = \frac{\rho_*^2}{|\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)|}\rho.$$

Also, wenn $\mathbf{M} \neq \mathbf{M}_*$, dann folgt es aus der ersten Gleichung, dass $\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = \rho_*^2$. Wenn $\mathbf{M} = \mathbf{M}_*$, dann $\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) < 0$ und aus der zweiten Gleichung folgt es nochmal, dass

$-\rho^2 = \mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = -\rho_*^2$. Das bedeutet, dass $\rho = \rho_*$ und deshalb $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_*$ gegen die Voraussetzung.

Wir beweisen nun die zweite Behauptung. Wenn $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$ müssen sich die Sphären $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}_*$ nach Eigenschaft 2 in der Vorlesung 15 schneiden. Es sei nun α eine 2-Ebene durch $\mathbf{M}_*$, die $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}_*$ in Kreisen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}_*$ schneidet. Es sei $\mathbf{x} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_*$. Wenn die Gerade durch $\mathbf{M}_*$ und $\mathbf{x}$ tangent an $\mathcal{C}$ ist, dann gilt nach dem Hilfsatz 13.7:

$$\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*) = \rho_*^2.$$

Wenn die Gerade durch $\mathbf{M}_*$ und $\mathbf{x}$ tangent an $\mathcal{C}$ ist, dann gibt es genau einen zusatzlichen Schnittpunkt $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}$ zwischen solcher Gerade und $\mathcal{C}$, der nicht auf $\mathcal{C}_*$ liegt. Also $|\mathbf{x}' - \mathbf{M}_*| \neq \rho_*$ und nach dem Hilfsatz 13.7:

$$|\mathrm{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)| = \rho_* \cdot |\mathbf{x}' - \mathbf{M}_*| \neq \rho_* \cdot \rho_*. \qquad \square$$

Aufgabe 17.3. *Es sei $I_*^{\pm} : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Inversion und $\mathcal{S} \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ eine Sphäre, die nicht radial bezüglich $\mathbf{M}_*$ ist. Beweisen Sie, dass $\mathcal{S}$ invariant durch I_*^+ ist, genau dann, wenn $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_*$. Beweisen Sie auch, dass $\mathcal{S}$ nicht invariant durch I_*^- sein kann.*

Aus dem Satz 17.1 und der Aufgabe 17.3 haben wir die folgende Charakterisierung der Hodographen mit Energie $h = -1/2$.

Folgerung 17.4. *Die Hodographen von Lösungen des keplerschen Problems mit $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ und $h = -1/2$ sind genau diejenigen radialen Kreise (bzg. $\mathbf{0}$) in $\mathbb{R}^3$, die invariant durch die negative Inversion an der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ sind.*

Um die geometrische Version des Satzes von Moser zu beweisen, reicht es nun zu zeigen, dass die negative Inversion an der Einheitssphäre $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und die antipodale Abbildung $A_* : S^{n-1} \to S^{n-1}$ durch die stereographische Projektion verknüpft sind.

Satz 17.5. *Wir haben das folgende kommutative Diagramm*

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "A_*"] \arrow[d, "\Psi"'] & S^{n-1}, \arrow[d, "\Psi"] \\ \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \arrow[r, "I_*^-"] & \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \end{tikzcd} \tag{17.1}$$

wobei $I_*^- : \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ die negative Inversion an der Einheitssphäre $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ist. Die Kommutativität bedeutet einfach, dass $\Psi \circ A_* = I_*^- \circ \Psi$.

Beweis. Es sei $\mathbf{x} \in S^{n-1}$. Wenn $\mathbf{x} = \mathbf{N}$, dann $\Psi \circ A_*(\mathbf{N}) = \Psi(\mathbf{S}) = \mathbf{0} = I_*^-(\infty) = I_*^-(\Psi(\mathbf{N}))$. Es sei nun angenommen, dass $\mathbf{x} \neq \mathbf{N}$. Der Winkel $\widehat{\mathbf{x}\mathbf{N}A_*(\mathbf{x})}$ is recht nach dem Satz von Thales. Also ist $\Delta(\Psi(\mathbf{x})\mathbf{N}\Psi(A_*(\mathbf{x}))$ ein rechtwinkliges Dreieck und $\mathbf{0}$ ist der Fußpunkt der Höhe auf der Hypothenuse. Wir haben deshalb

$$1^2 = |\Psi(\mathbf{x})| \cdot |\Psi(A_*(\mathbf{x}))|.$$

Da $\mathbf{0}$ auf der Strecke zwischen $\Psi(\mathbf{x})$ und $\Psi(A_*(\mathbf{x}))$ liegt, folgt es aus der Definition der negativen Inversion, dass $I_*^-(\Psi(\mathbf{x})) = \Psi(A_*(\mathbf{x}))$, wie gewünscht. $\square$

Beweis der ersten Aussage im Satz 14.1. Es sei $\mathcal{C}$ ein Kreis in S^3 und betrachten wir $\mathcal{C}' = \Psi(\mathcal{C})$. Wenn $\mathbf{N} \in \mathcal{C}$, dann ist $\mathcal{C}'$ eine Gerade in $\mathbb{R}^3$. Wenn $\mathbf{N} \notin \mathcal{C}$, dann ist $\mathcal{C}$ ein Kreis in $\mathbb{R}^3$. Nach Satz 17.5 ist $\mathcal{C}$ invariant durch A_* genau dann, wenn $\mathcal{C}'$ invariant durch I_*^- ist. Nach Satz 14.12 und der Folgerung 17.4 sehen wir, dass $\mathcal{C}$ ein Großkreis ist, genau dann wenn $\mathcal{C}'$ eine Gerade durch $\mathbf{0}$ ist (falls $\mathbf{N} \in \mathcal{C}$) oder $\mathcal{C}$ der Hodograph, von einer Lösung mit $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ und $h = -1/2$ ist. Da die Geraden durch $\mathbf{0}$ die Hodographe der Lösungen mit $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ und $h = -1/2$ sind, ist der Beweis vollständig. $\square$

Um die zweite Aussage in dem Satz von Moser zu beweisen, fangen wir an, eine Parametrisierung des Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ nach der exzentrischen Anomalie zu bestimmen.

Hilfsatz 17.6. *Es sei $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_\times$ eine (regularisierte) Lösung des keplerschen Problems mit Energie $h = -1/2$ und es sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ihre exzentrische Anomalie. Es gilt die Formel*

$$\mathbf{v}(u) = \frac{1}{1 - e\cos u}\Big(- e\sin u\,\mathbf{e}_1 + \sqrt{1-e^2}\cos u\,\mathbf{f}_1\Big), \tag{17.2}$$

wobei $\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1 \in S^2$ mit $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1\rangle = 0$. Wenn die Exzentrizität e im offenen Intervall $(0,1)$ liegt, dann gilt $\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{e}}$ und $\mathbf{f}_1 = \mathbf{i}\cdot\hat{\mathbf{e}}$. Wenn $e = 0$ aber $c \neq 0$ bilden $\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1, \hat{\mathbf{c}}$ eine positive orthonormale Basis.

Beweis. Nach der Kettenregel haben wir $\mathbf{v} = \dot{u}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}$. Wir leiten die Kepler-Gleichung (11.2) nach t ab, um $\dot{u}$ mit Hilfe von (9.9) zu finden:

$$\dot{u} = \frac{1}{1 - e\cos u}.$$

Der Term $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}$ gewinnen wir, indem wir die Formeln im Hilfsatz 10.7, bzw. im Satz 11.3 nach u ableiten. Die Multiplikation der zwei Termen gibt uns die gewünschte Formel für $\mathbf{v}(u)$. $\square$

Beweis der zweiten Aussage im Satz 14.1. Die Parametrisierung nach der Bogenlänge eines Großkreises $\gamma : \mathbb{R} \to S^3$ ist aus der Formel (14.1) zu lesen. Nach dem Satz 14.7 bekommen wir

$$\Psi(\gamma(u)) = \Psi\Big(- \sin u\,\mathbf{e}_1 + \sqrt{1-e^2}\cos u\,\mathbf{f}_1, e\cos u\Big) = \mathbf{v}(u),$$

wobei die zweite Gleichung aus den Hilfsatz 17.6 stammt. $\square$