25 Totale Kollisionen und homographische Lösungen 19.7.

25.1 Der Satz von Sundman

Wir werden nun den folgenden Satz von Sundman über totale Kollisionen beweisen.

Satz 25.1 (Sundman, 1912)**.** *Es sei $\tilde{U}(r) = \tilde{U}_1 r^p$ mit $\tilde{U}_1 < 0$ und $-2 < p < 0$. Eine Lösung $\mathbf{r} : [0, t_\infty) \to \Delta^c$ von (22.8) bezüglich dem Potential $\tilde{U}$ mit $\mathbf{r}_S \equiv \mathbf{0}$, die eine totale Kollision erlebt, besitzt verschwindenden Drehimpuls: $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.*

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir die folgende Abschätzung.

Hilfsatz 25.2 (Sundmans Ungleichung)**.** *Für jede Lösung von (22.8) mit $\tilde{U}$ eine p-homogene Funktion gilt*

$$c^2 \leq \frac{4}{p+2} I(\ddot{I} + ph). \tag{25.1}$$

Beweis. Wir schätzen ab

$$c = \Big| \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \Big| \leq \sum_{i=1}^n m_i |\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i| \leq \sum_{i=1}^n m_i r_i v_i = \sum_{i=1}^n (\sqrt{m_i} r_i)(\sqrt{m_i} v_i) \leq \sqrt{2I}\sqrt{2T},$$

wo wir im letzten Schritt die Cauchy-Schwarz Ungleichung benutzt haben. Da $(p+2)T = \ddot{I} + ph$ nach (24.6), folgt durch Quadrierung

$$c^2 \leq 4IT = 4I \frac{\ddot{I} + ph}{p+2}. \qquad \square$$

Beweis des Satzes von Sundman. Wir nehmen $t_1 \in (0, t_\infty)$ groß genug, sodass $\dot{I}(t) < 0$ und $I(t) < 1$ für alle $t \in (t_1, t_\infty)$. Wir multiplizieren dann die Sundmans Ungleichung nach $-\dot{I}/I > 0$ und bekommen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(c^2 \log \frac{1}{I}\Big) = -c^2 \frac{\dot{I}}{I} \leq -\frac{4}{p+2}(ph\dot{I} + \dot{I}\ddot{I}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[-\frac{4}{p+2}\Big(phI + \frac{1}{2}\dot{I}^2\Big)\Big].$$

Also gibt es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ mit

$$c^2 \log \frac{1}{I} \leq -\frac{4}{p+2}\Big(phI + \frac{1}{2}\dot{I}^2\Big) + K \leq CI + K, \qquad C := \frac{-4ph}{p+2}.$$

Da $I < 1$ ist $\log \frac{1}{I} > 0$ und wir schließen

$$c^2 \leq \frac{CI + K}{\log \frac{1}{I}}.$$

Wir nehmen dann den Limes der rechten Seite für $t \to t_\infty$ und benutzen dass $I(t) \to 0$, sodass $\log \frac{1}{I(t)} \to +\infty$ und

$$c^2 \leq \lim_{t \to t_\infty} \frac{CI(t) + K}{\log \frac{1}{I(t)}} = 0. \qquad \square$$

25.2 Homographische Lösungen

In diesem Abschnitt werden wir nur das n-Körperproblem (möglicherweise eingeschränkte) betrachten. Die Diskussion lässt sich leicht für ein abstraktes Potential der Art $\tilde{U}(r) = \tilde{U}_1 r^p$ mit $\tilde{U}_1 < 0$ und $p < 0$ anpassen.

Also suchen wir nach Lösungen von (22.3), die schöne geometrische Eigenschaften besitzen und werden stets annehmen, dass alle die Konfigurationen Schwerpunkt in $\mathbf{0}$ haben.

Definition 25.3. Eine Lösung $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) : (t_0, t_1) \to \Delta^c$ von (22.3) heißt *homographisch*, wenn $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in \Delta^c$ und Abbildungen $\lambda : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}^+$ und $Q : (t_0, t_1) \to SO(3)$ existieren, sodass

$$\mathbf{r}_i(t) = \lambda(t) Q(t) \mathbf{a}_i, \qquad \forall\, t \in (t_0, t_1), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{25.2}$$

Also bleibt die Lösung selbstähnlich. Eine homographische Lösung $\mathbf{r}$ ist

- *homothetisch*, wenn Q konstant ist (o.B.d.A. $Q(t) \equiv \mathbf{I}_3$);
- ein *relatives Gleichgewicht*, wenn λ konstant ist (o.B.d.A. $\lambda(t) \equiv 1$);
- *eben*, wenn eine *feste* Ebene α (durch $\mathbf{0}$) existiert, sodass

  $$\mathbf{r}_i(t) \in \alpha, \qquad \forall\, t \in (t_0, t_1), \quad i = 1, \ldots, n.$$

  Wenn wir o.B.d.A. annehmen, dass $\alpha = \mathbb{C} \times 0 \subset \mathbb{R}^3$ die xy-Ebene ist, dann haben wir die äquivalente Darstellung

  $$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{z}(t) \mathbf{a}_i, \qquad \forall\, t \in (t_0, t_1), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{25.3}$$

  wobei $\mathbf{r}_i(t), \mathbf{z}(t), \mathbf{a}_i$ komplexe Zahlen sind und die Multiplikation zwischen $\mathbf{z}_i(t)$ und $\mathbf{a}_i$ komplex ist.

Bemerkung 25.4. Man kann zeigen, dass eine homographische Lösung homothetisch ist, genau dann wenn der gesamte Drehimpuls verschwindet (Aufgabe 7.6 im Buch von Geiges).

Wir fangen an, die homothetische Lösungen zu beschreiben.

Definition 25.5. Es seien $m_1, \ldots, m_{n-1} > 0$ und $m_n \geq 0$. Eine Konfiguration $\mathbf{a} \in \Delta^c$ heißt *zentral* bezüglich der Massen $m_1, \ldots, m_n$, wenn es $\mu \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\mu \mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} \frac{G m_j}{a_{ij}^2} \hat{\mathbf{a}}_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{25.4}$$

Wenn $m_n > 0$, lässt sich diese Bedingung auch als

$$\mu \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} = \operatorname{grad} U(\mathbf{a}) \tag{25.5}$$

umschreiben. Die Konfiguration $\mathbf{a}$ heißt eben, wenn es eine Ebene α gibt, sodass $\mathbf{a}_i \in \alpha$ für $i = 1, \ldots, n$.

Bemerkung 25.6. Wenn $m_n = 0$ und $\mathbf{a}$ zentral ist, dann bilden auch die $n-1$ Körper $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ auch eine zentrale Konfiguration.

Bemerkung 25.7. Es sei $\mathbf{a} \in \Delta^c$ zentral mit Konstante μ. Dann ist der Schwerpunkt $\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Außerdem, für alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ und $Q \in SO(3)$ ist $\lambda Q\mathbf{a} := (\lambda Q\mathbf{a}_1, \dots, \lambda Q\mathbf{a}_n)$ zentral mit Konstante μ/λ^3.

Satz 25.8. *Es sei* $\mathbf{a} \in \Delta^c$. *Die Konfiguration* $\mathbf{a}$ *ist zentral (mit Konstante* μ*) genau dann, wenn es eine Funktion* $\lambda : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}^+$ *gibt, sodass* $t \mapsto \mathbf{r}(t) := \lambda(t)\mathbf{a}$ *eine (homothetische) Lösung von* (22.1) *ist. In diesem Fall löst* λ *das* 1*-dimensionale Keplerproblem mit Konstante* μ*:*

$$\ddot{\lambda} = -\frac{\mu}{\lambda^2}.$$

Beweis. Es sei $\lambda : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion und man definiere $\mathbf{r}_i := \lambda \mathbf{a}_i$. Wir haben $\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\lambda}\mathbf{a}_i$ und

$$-\sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{r_{ij}^2}\hat{\mathbf{r}}_{ij} = -\lambda^2 \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{a_{ij}^2}\hat{\mathbf{a}}_{ij}.$$

ist $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\mathrm{grad}\, U(\mathbf{r})$ gleichbedeutend mit

$$\mu \mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{a_{ij}^2}\hat{\mathbf{a}}_{ij}, \qquad \mu := -\lambda^2 \ddot{\lambda}.$$

Da es $\mathbf{a}_i$ mit $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$ gibt, sehen wir, dass μ konstant ist. Die Behauptung ist bewiesen. □

Satz 25.9. *Es seien die Massen* $m_1, \dots, m_n$ *positiv. Die Konfiguration* $\mathbf{a} \in \Delta^c$ *ist zentral genau dann, wenn* $\mathbf{a}$ *ein kritischer Punkt der Funktion* $IU^2 : \Delta^c \to \mathbb{R}^+$ *ist. In diesem Fall ist die Konstante* μ *gegeben als*

$$\mu = -\frac{U(\mathbf{a})}{2I(\mathbf{a})} > 0.$$

Beweis. Wir nehmen das Skalarprodukt beider Seiten von (25.5) mit $\mathbf{a}$, sodass der Hilfsatz 24.3 liefert $\mu 2I(\mathbf{a}) = -U(\mathbf{a})$. Die Symmetrie von $\mathbf{M}$ liefert $\mathrm{grad}\, I(\mathbf{a}) = \mathbf{M}\cdot\mathbf{a}$. Die Gleichung (25.5) lässt sich durch diese Identität und der Formel für μ äquivalent umschreiben als

$$-U(\mathbf{a})\mathrm{grad}\, I(\mathbf{a}) = 2I(\mathbf{a})\mathrm{grad}\, U(\mathbf{a}).$$

Wir multiplizieren diese Gleichung nach $U(\mathbf{a}) \neq 0$ und bekommen

$$\mathbf{0} = I(\mathbf{a})(2U(\mathbf{a})\mathrm{grad}\, U(\mathbf{a}) + U^2(\mathbf{a})\mathrm{grad}\, I(\mathbf{a}) = \mathrm{grad}\,\big(IU^2\big)(\mathbf{a}).$$ □

Folgerung 25.10. *Es seien die Massen* $m_1, \dots, m_n$ *positiv. Dann existiert eine zentrale Konfiguration bezüglich* $m_1, \dots, m_n$.

Beweis. Dank des Satzes 25.9 ist es genug zu zeigen, dass die Funktion IU^2 ein Minimum besitzt. Die Funktion ist 0-homogen, da

$$I(\lambda \mathbf{a})(U(\lambda \mathbf{a}))^2 = \lambda^2 I(\mathbf{a})\lambda^{-2}U(\mathbf{a})^2 = I(\mathbf{a})U(\mathbf{a})^2, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \mathbf{a} \in \Delta^c.$$

Also können wir die Funktion IU^2 auf der Menge $\Delta_1^c := \{I = 1\} \cap \Delta^c$ minimieren. Auf dieser Menge $IU^2 = U^2$. Es sei $\mathbf{a}_* \in \Delta_1^c$. Dann gibt es $\epsilon > 0$, so dass

$$\forall\, \mathbf{a} \in \Delta_1^c, \quad \exists\, i \neq j, \qquad a_{ij} < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad U^2(\mathbf{a}) > U^2(\mathbf{a}_*).$$

Dann

$$\inf_{\Delta_1^c} U^2 = \inf_{M'_\epsilon} U^2, \qquad M'_\epsilon := \{I = 1\} \cap \{r_{ij} \geq \epsilon \mid \forall\, i \neq j\} \subset \Delta_1^c \tag{25.6}$$

Da die Menge M'_ϵ kompakt ist, besitzt U^2 ein globales Minimum $\mathbf{a}_-$ auf M'_ϵ. Nach (25.6) ist $\mathbf{a}_-$ auch ein globales Minimum für U^2 auf Δ_1^c. □

Die Aufgabe 7.7 in dem Buch von Geiges zeigt, dass alle relative Gleichgewichte eben sind. Eigentlich gilt das folgende stärkere Resultat, das wir ohne Beweis angeben.

Satz 25.11. *Eine nicht ebene homographische Lösung ist homothetisch.* □