24 Kollisionen in dem n-Körperproblem 16.7.

Wir betrachten nun eine Gleichung der Art $\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = -\mathrm{grad}\, U(\mathbf{r})$, wobei $U : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$, $\mathscr{R}$ ein verallgemeinerter Kegel und U eine p-homogene Funktion.

Definition 24.1. Eine Menge $\mathscr{R} \subset \mathbb{R}^d$ heißt verallgemeinerter Kegel, wenn

$$\mathbf{r} \in \mathscr{R} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+, \;\; \lambda\mathbf{r} \in \mathscr{R}.$$

Es sei $p \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $U : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ auf einem verallgemeinerten Kegel heißt p-homogen, wenn

$$U(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^p U(\mathbf{r}), \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+, \; \mathbf{r} \in \mathscr{R}.$$

Aufgabe 24.2. *Zeigen Sie, dass die Menge Δ^c ein verallgemeinerter Kegel ist. Wenn die Funktion $\tilde{U} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ p-homogen ist, ist auch das Potential U p-homogen. Zeigen Sie, dass $\tilde{U} \neq 0$ p-homogen ist, genau dann, wenn es $\tilde{U}_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit*

$$\tilde{U}(r) = \tilde{U}_1 r^p, \qquad \forall\, r \in \mathbb{R}^+.$$

Dieses Potential genügt der Bedingung $\liminf_{r\to+\infty} \tilde{U}(r) > -\infty$ *vom Satz* 23.6 *genau dann, wenn $p\tilde{U}_1 \geq 0$. Das Potential $\tilde{U}(r) = -G/r$ ist homogen mit $p = -1$ und $\tilde{U}_1 = -G$.*

Hilfsatz 24.3. *Es sei $U : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ eine p-homogene Funktion auf einem offenen verallgemeinerten Kegel. Dann, für alle $\mathbf{r} \in \mathscr{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}^+$ gilt*

$$\mathrm{grad}\, U(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^{p-1}\mathrm{grad}\, U(\mathbf{r}), \qquad \langle \mathrm{grad}\, U(\mathbf{r}), \mathbf{r}\rangle = p\, U(\mathbf{r}). \tag{24.1}$$

Beweis. Die zwei Identitäten folgen unmittelbar, wenn wir $U(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^p U(\mathbf{r})$ nach $\mathbf{r}$ beziehungsweise nach λ (und $\lambda = 1$ einsetzen) ableiten. □

Folgerung 24.4. *Es sei $U : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ eine p-homogene Funktion auf einem offenen verallgemeinerten Kegel mit $p \neq 0$ und $U(\mathbf{r}) \neq 0$ für alle $\mathbf{r} \in \mathscr{R}$. Dann ist der Gradient von U nirgends null und die Gleichung $\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = -\mathrm{grad}\, U$ keine konstante Lösung besitzt. Insbesondere besitzt das n-Körperproblem* (22.1) *keine konstante Lösung.*

caption. Wenn der Gradient im Punkt $\mathbf{r}$ gleich Null wäre, hätten wir $0 = \langle \mathrm{grad}\, U(\mathbf{r}), \mathbf{r}\rangle = pU(\mathbf{r})$. Also einer zwischen p und $U(\mathbf{r})$ wäre Null. Die Korrespondenz zwischen kritischen Punkten von U und konstanten Lösungen von $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} = -\mathrm{grad}\, U(\mathbf{r})$ war der Inhalt von Aufgabe 4.2. □

Für homogene Potentiale die Trägheitsmoment

$$I : \mathscr{R} \to \mathbb{R}^+, \qquad I(\mathbf{r}) := \frac{1}{2}\langle \mathbf{r}, \mathbf{M}\cdot\mathbf{r}\rangle, \;\; \forall\, \mathbf{r} \in \mathscr{R}$$

spielt eine wichtige Rolle.

Beispiel 24.5. Für ein System von n-Körpern mit Matrix $\mathbf{M}$ gegeben durch (22.7) haben wir einfach

$$I(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Hilfsatz 24.6 (Lagrange-Jacobi Identität)**.** *Es sei $U : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ eine p-homogene Potential. Wenn $\mathbf{r}$ eine Lösung von $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\operatorname{grad} U(\mathbf{r})$ mit Energie $E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = h$ ist, gilt dann*

$$\ddot{I} = 2T - pU = 2h - (p+2)U = (p+2)T - ph. \tag{24.2}$$

Beweis. Mit Hilfe der Symmetrie von $\mathbf{M}$ haben wir

$$\dot{I} = \tfrac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}\rangle + \tfrac{1}{2}\langle \mathbf{r}, \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{r}}\rangle = \langle \mathbf{r}, \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{r}}\rangle.$$

Wenn wir nochmal ableiten, bekommen wir

$$\ddot{I} = \langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{r}}\rangle + \langle \mathbf{r}, \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{r}}\rangle = 2T(\dot{\mathbf{r}}) - \langle \mathbf{r}, \operatorname{grad} U(\mathbf{r})\rangle = 2T(\dot{\mathbf{r}}) - pU(\mathbf{r}).$$

Das zeigt die erste Identität. Die anderen zwei folgen aus $h = T + U$. □

Mit Hilfe der Trägheitsmoment können wir die maximale Lösungen des n-Körperproblem mit endlichem Lebensdauer besser verstehen. Insbesonder werden wir beweisen, dass für $n = 3$ sie einer Kollision entsprechen.

Definition 24.7. Eine Lösung $\mathbf{r} : [0, t_\infty) \to \Delta^c$ von (22.8) erlebt eine totale Kollision, wenn es $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$\lim_{t \to t_\infty} \mathbf{r}_i(t) = \mathbf{q}, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Hilfsatz 24.8. *Wenn eine Lösung $\mathbf{r} : [0, t_\infty) \to \Delta^c$ von (22.8) mit $\mathbf{r}_S \equiv \mathbf{0}$ eine totale Kollision in $\mathbf{q}$ erlebt, dann $\mathbf{r}_S = \mathbf{q}$. Es folgt daraus, dass $\lim_{t \to t_\infty} I(t) = 0$.*

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus

$$\mathbf{r}_S = \lim_{t \to t_\infty} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i(t) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \lim_{t \to t_\infty} \mathbf{r}_i(t) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{q} = \frac{1}{m} m \mathbf{q} = \mathbf{q}.$$ □

Satz 24.9. *Es sei $\mathbf{r} : [0, t_\infty) \to \Delta^c$ eine maximale Lösung von (22.8) mit $\mathbf{r}_S = \mathbf{0}$, wobei $\nu_{ij} > 0$ und $\tilde{U}(r) = \tilde{U}_1 r^p$ mit $\tilde{U}_1 < 0$ und $p \in (-2, 0)$ (zum Beispiel $\mathbf{r}$ löst (22.1)). Es sei angenommen, dass $i \neq j$ gibt mit*

$$\lim_{t \to t_\infty} r_{ij}(t) = 0.$$

Dann $\lim_{t \to t_\infty} \ddot{I}(t) = +\infty$ und

$$\textit{entweder} \qquad \lim_{t \to t_\infty} I(t) = 0 \qquad \textit{oder} \qquad \exists\, I_0 \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, t \in [0, t_\infty), \quad I(t) \geq I_0. \tag{24.3}$$

Im ersten Fall erlebt das System eine totale Kollision, die Lebensdauer t_∞ ist endlich und $\dot{I}(t)$ ist negativ für t groß genug. Im zweiten Fall und unter der zusätzlichen Voraussetzung $n = 3$ gilt die folgende Aussage: Wenn $t_\infty = +\infty$, dann konvergieren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ gegen $\infty \in \bar{\mathbb{R}}^3$; wenn $t_\infty < +\infty$ gibt es $\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^3$ und $\rho \in \mathbb{R}^+$, sodass

- $\lim_{t\to t_\infty} \mathbf{r}_i(t) = \mathbf{q}_1 = \lim_{t\to t_\infty} \mathbf{r}_j(t)$,
- $\forall\, t \in [0, t_\infty), \quad r_{i\ell}(t) \geq \rho, \quad r_{j\ell}(t) \geq \rho$,

wobei $\ell \neq i, j$.

Beweis. Unter den Voraussetzungen über das Potential gilt $U(\mathbf{r}) \leq U_1 r_{ij}^p$, $U_1 := \nu_{ij}\tilde{U}_1 < 0$. Da $r_{ij}(t)$ für $t \to t_\infty$ gegen Null konvergiert, haben wir auch

$$\lim_{t\to t_\infty} U(\mathbf{r}(t)) \leq \lim_{t\to t_\infty} U_1 r_{ij}^p(t) = -\infty.$$

Nach der Lagrange-Jacobi Identität

$$\lim_{t\to t_0} \ddot{I}(t) = \lim_{t\to t_0} \Big(2h + (p-2)U(\mathbf{r}(t))\Big) = +\infty.$$

Das impliziert, dass entweder $\dot{I}(t) < 0$ für t groß genug oder $\dot{I}(t) > 0$ für t groß genug. Im ersten Fall muss t_∞ endlich sein, wie wir jetzt begründen. Es gibt t_1, sodass für alle $t \geq t_1$ die Ungleichungen $\ddot{I}(t) \geq 1$ und $\dot{I}(t) < 0$ gelten. Der Fundamentalsatz der Analysis liefert

$$0 > \dot{I}(t) = \dot{I}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \ddot{I}(\tau)\mathrm{d}\tau \geq \dot{I}(t_1) + (t - t_1)$$

und wir folgern $t < t_1 - \dot{I}(t_1)$. Es sei dann $I_\infty := \lim_{t\to t_\infty} I(t)$. Wenn $I_\infty = 0$, erlebt das System eine totale Kollision. Wenn $I_\infty > 0$, besitzt I eine positive untere Schranke. Die Alternative (24.3) ist somit vollständig bewiesen.

Es sei nun angenommen, dass $n = 3$ und $I(t) \geq I_0 > 0$ für alle $t \in [0, t_\infty)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $i = 1$, $j = 2$ und $\ell = 3$. Es sei $\mathbf{r}' := \frac{1}{m'}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)$, wobei $m' := m_1 + m_2$. Wir haben

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m'}\mathbf{r}_{21}, \qquad \mathbf{r}' - \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m'}\mathbf{r}_{12},$$

sodass $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|$ und $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2|$ gegen Null konvergieren für $t \to t_\infty$. Da $\mathbf{0} = \mathbf{r}_S$ gewinnen wir

$$\mathbf{r}' = -\frac{m_3}{m'}\mathbf{r}_3, \qquad \mathbf{r}_3 = -\frac{m'}{m_3}\mathbf{r}' \tag{24.4}$$

und wir haben die Formel

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \frac{m_1 m_2}{m'} r_{12}^2 = m' r'^2. \tag{24.5}$$

Es folgt daraus, dass

$$I = I' - \frac{m_1 m_2}{m'} r_{12}^2, \qquad I' := \frac{1}{2} m' r'^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2$$

sodass $|I(t) - I'(t)|$ gegen Null konvergiert für $t \to t_\infty$. Wir leiten aus (24.4)

$$\frac{1}{2}\frac{m_3 m}{m'} r_3^2 = I' = \frac{1}{2}\frac{m'm}{m_3} r'^2$$

her. Es sei nun angenommen, dass $t_\infty = +\infty$. Dann $I(t) \to +\infty$, da $\ddot{I}(t) \to +\infty$. Wir haben auch $I'(t) \to +\infty$ und deshalb $r_3, r' \to +\infty$.

Es sei nun angenommen, dass $t_\infty < +\infty$. Aus einem Beweis per Widerspruch folgt es, dass es ein $\rho > 0$ gibt mit $r_{13}(t) \geq \rho$ und $r_{13}(t) \geq \rho$ (sonst $\liminf_{t \to t_\infty} I(t) = 0$). Nach der Gleichung (22.8) gewinnen wir

$$|\ddot{\mathbf{r}}_3| \leq C, \qquad C := \tfrac{1}{m_3}(\nu_{13} + \nu_{23}) p \tilde{U}_1 \rho^{p-1}.$$

Der Fundamentalsatz der Analysis liefert $|\dot{\mathbf{r}}_3| \leq C'$ und deshalb

$$|\mathbf{r}_3(t) - \mathbf{r}_3(t')| \leq C'|t - t'|, \qquad \forall\, t, t' \in [0, t_\infty).$$

Da $t_\infty < +\infty$ sehen wir, dass $\mathbf{r}_3(t) \to \mathbf{q}_3 \in \mathbb{R}^3$ als $t \to t_\infty$. Dann $\mathbf{q}_1 = -\frac{m_3}{m'}\mathbf{q}_3$. $\square$

Aufgabe 24.10. *Es sei $\tilde{U}(r) = \tilde{U}_1 r^p$ mit $\tilde{U}_1 < 0$ und $-2 < p < 0$. Wir betrachten eine Lösung $\mathbf{r} : [0, +\infty)$ mit unendlicher Lebensdauer. Zeigen Sie, dass falls $h \geq 0$ die Konfiguration nicht beschränkt ist. Das heißt, dass für jede $t_0 > 0$ und $\rho > 0$ für alle $t \geq t_0$ ein Körper $\mathbf{r}_{i(t)}$ existiert mit $r_{i(t)}(t) > \rho$.*