1 Motive und historischer Abriss 16.4.

Die Himmelsmechanik beschäftigt sich mit der Bahnbestimmung der Gestirne. Man versucht also zu verstehen

- die Geometrie der Bahnen (die Bahnform);
- die Zeitparametrisierung der Bahnen (die Dynamik).

Anfang des siebzehnten Jahrhunderts formuliert Johannes Kepler drei planetarsche Gesetze, die die empirischen Beobachtungen von Tycho Brahe begründeten:

1. *Die Bahnen der Planeten um die Sonne sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht (1609).*
2. *Die Verbindungslinie zwischen der Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Fläche (1609).*
3. *Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der mittleren Entfernungen (großen Halbachsen der Ellipsen) (1619).*

Newton leitet 1687 in seinem Buch *Principia Mathematica* die keplerschen Gesetze aus zwei umfassenden Gesetzen her: das Bewegungsgesetz ($\mathcal{D}$) und das Gravitationsgesetz ($\mathcal{G}$).

Das Bewegungsgesetz ($\mathcal{D}$)

Die Beschleunigung eines Körpers (oder Punktmasse) Q ist proportional zur der gesamten Kraft, die auf den Körper Q wirkt. Die Proportionalitätskonstante m_Q ist positiv und unabhängig von der Kraft. Wir nennen m_Q die Masse von Q. Wir übersetzen das Gesetz in die moderne Sprache des Vektoranalysis. Wenn die Bewegung des Körpers und die Kraft durch Vektorfunktionen $t \mapsto \mathbf{r}_Q(t) \in \mathbb{R}^3$ und $t \mapsto \mathbf{F}_Q(t) \in \mathbb{R}^3$ der Zeit $t \in \mathbb{R}$ gegeben sind, gilt

$$\mathbf{F}_Q(t) = m_Q \ddot{\mathbf{r}}_Q(t). \tag{$\mathcal{D}$}$$

Das Gravitationsgesetz ($\mathcal{G}$)

Ein Körper Q_2 wirkt auf einen Körper Q_1 mit einer Gravitationskraft $\mathbf{F}_{Q_1Q_2}$ ein, die entlang der Verbindungslinie von Q_1 nach Q_2 gerichtet und deren Stärke proportional zum Produkt der beiden Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstandes ist. Die Proportionalitätskonstante ist positiv, unabhängig von Q_1 und Q_2 und heißt die universelle Gravitationskonstant G. Die entsprechende Vektorgleichung lautet (Zeit t weggelassen von der Notation)

$$\mathbf{F}_{Q_1Q_2} = \frac{G m_{Q_1} m_{Q_2}}{|\mathbf{r}_{Q_2} - \mathbf{r}_{Q_1}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{Q_2} - \mathbf{r}_{Q_1}}{|\mathbf{r}_{Q_2} - \mathbf{r}_{Q_1}|}. \tag{$\mathcal{G}$}$$

Das keplersche Problem

Es seien P_1 und P_2 zwei Körper und es sei weiter angenommen, dass P_2 fest im Nullpunkt ist und dass $\mathbf{F}_{P_1} = \mathbf{F}_{P_1P_2}$, d.h die einzige Kraft, die auf P_1 wirkt, ist die Gravitationskraft des Körpers P_2. Dann ergibt sich aus $(\mathcal{D})$ und $(\mathcal{G})$ die folgende Gleichung für $\mathbf{r} := \mathbf{r}_{P_1}$:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \tag{$\mathcal{K}$}$$

wobei $\mu := Gm_{P_2} > 0$. Die Bestimmung einer Lösung der Gleichung $(\mathcal{K})$ heißt *keplersches Problem*. Newton zeigte, dass, wenn P_1 ein Planet des Sonnensystems und P_2 die Sonne ist, die (beschränkten) Lösungen $\mathbf{r}$ des keplerschen Problems, erfüllen die drei planetarschen Gesetze von Kepler.

Das Zweikörperproblem

Die Annahme, dass $\mathbf{r}_{P_2}$ fest ist, impliziert, dass $\mathbf{F}_{P_2} = \mathbf{F}_{P_2P_1} = 0$. Also auf dieser Weise haben wir die Anziehungskraft von P_1 auf P_2 vernachlässigt (nicht so schlimm, wenn m_{P_2} viel größer als m_{P_1} ist). Die Bahnbestimmung von *beiden* Körpern P_1 und P_2 unter der *gegenseitigen* Anziehungskraft heißt Zweikörperproblem. Es handelt sich darum, die Funktionen $\mathbf{r}_{P_1}$ und $\mathbf{r}_{P_2}$ zu bestimmen, die dem Gleichungssystem

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_{P_1} = \dfrac{Gm_{P_2}}{|\mathbf{r}_{P_2} - \mathbf{r}_{P_1}|^2} \cdot \dfrac{\mathbf{r}_{P_2} - \mathbf{r}_{P_1}}{|\mathbf{r}_{P_2} - \mathbf{r}_{P_1}|} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{P_2} = \dfrac{Gm_{P_1}}{|\mathbf{r}_{P_1} - \mathbf{r}_{P_2}|^2} \cdot \dfrac{\mathbf{r}_{P_1} - \mathbf{r}_{P_2}}{|\mathbf{r}_{P_1} - \mathbf{r}_{P_2}|}. \end{cases} \tag{$\mathcal{ZKP}$}$$

genügen. Das Zweikörperproblem ist nicht schwer zu lösen. Die Bahnen der zwei Körper gehörchen jeweils einer Gleichung derart $(\mathcal{K})$ (mit zwei verschiedenen Konstanten μ), wenn man den Nullpunkt in dem Schwerpunkt $\frac{1}{m_{P_1}+m_{P_2}}(m_{P_1}\mathbf{r}_{P_1} + m_{P_2}\mathbf{r}_{P_2})$ hinstellt. Insbesondere gelten die keplerschen Gesetze immer noch, wenn man den Schwerpunkt zwischen dem Planeten und der Sonne statt der Lage der Sonne benutzt.

Das n-Körperproblem

Nun gibt es in unserem Sonnensystem mehrere Planeten, so dass die Bahnen der Sonne und eines bestimmten Planeten die Gleichungen $(\mathcal{ZKP})$ nicht mehr lösen. Daher betrachten wir allgemein eine Anzahl n von Körpern $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Die Bahnbestimmung dieser Körper unter der gegenseitigen Anziehungskraft heißt n-Körperproblem, wobei die Massen der Körper beliebig sein dürfen. Man erhält ein System von n Gleichungen

$$\begin{cases} m_{P_1}\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} = \mathbf{F}_{P_1P_2} + \mathbf{F}_{P_1P_3} + \ldots + \mathbf{F}_{P_1P_n}, \\ \qquad \ldots \end{cases} \tag{$n\mathcal{KP}$}$$

Die allgemeine Lösung dieses Problem hat eine echte Herausforderung für viele Mathematiker dargestellt. Später in diesem Kurs werden wir einfache Lösungen dieses Problem betrachten. Die heißen homographische Lösungen und haben die Eigenschaft, dass das von den Körpern gebildete n-Ecke seine Lage im Verlauf der Zeit nur durch Ähnlichkeitsbewegungen ändert. Die Suche nach speziellen Lösungen des n-Körperproblem ist auch heute sehr aktiv. 2000 wurden von Chenciner und Montgomery choreographische Lösungen eingeführt, wobei alle die Körper auf eine feste geschlossene Kurve periodisch laufen. Man siehe die Webseite von James Montaldi `http://www.maths.manchester.ac.uk/~jm/Choreographies`.

Stabilität des Sonnensystems

Wie es auch von den choreographischen Lösungen zu sehen ist, gelten für allgemeine n-Körpersysteme die keplerschen Gesetze nicht. Wie ist es möglich dann, dass solche Gesetze in unserem Sonnensystem von empirischen Beobachtungen bestätigt sind? Newton war schon diese Schwierigkeit bekannt.

"Kepler's laws, although not rigidly true, are sufficiently near to the truth to have led to the discovery of the law of attraction of the bodies of the solar system. The deviation from complete accuracy is due to the facts, that the planets are not of inappreciable mass, that, in consequence, they disturb each other's orbits about the Sun".

Anders gesagt: die Gesamtkraft der anderen Planeten $\mathbf{F}_{P_1P_3} + \ldots \mathbf{F}_{P_1P_n}$ auf P_1 ist klein im Vergleich mit der Anziehungskraft $\mathbf{F}_{P_1P_2}$ der Sonne und sie schadet die keplerschen Gesetze in unserer Zeit mehr oder weniger nicht. Allerdings ist es möglich, dass die Bahnen der Planeten in der fernen Zukunft eine starke Veränderung erleben werden (Zusammenstöße oder Fluchten von Planeten). Newton bat dazu eine transzendentale Ausweg an:

"Blind fate could never make all the planets move one and the same way in orbs concentric, some inconsiderable irregularities excepted which may have arisen from the mutual actions of comets and planets on one another, and which will be apt to increase, till this system wants a reformation".

Seit Newton haben sich viele Wissenschftaler mit der Stabilität des Sonnensystems beschäftigt. Die Stabilitätsfrage spielt auch heute eine entscheidende Rolle in der modernen Theorie der dynamischen Systeme nach den Pionierarbeiten von Poincaré und Liapunov am Ende des neunzehnten Jahrhunderts:

Man hat ein ideelles System, das sehr gut beschreibbar ist. Was passiert, wenn man dieses System leicht stört? Bleibt das neue System nah an dem ideellen? Für wie lange?

Um die Stabilität des Sonnensystems zu beweisen, versuchten die Wissenschaftler eine explizite Lösung des abstrakten n-Körperproblems zu finden. In diesem Versuch enwickelte Laplace (1814) seinen mechanischen Determinismus, der betrachtet werden kann, als die Vorgänger der Theorie der Gewöhnlichen Differentialgleichungen:

„Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Universums als Folge eines früheren Zustandes ansehen und als Ursache des Zustandes, der danach kommt. Eine Intelligenz, die in einem gegebenen Augenblick alle Kräfte kennt, mit denen die Welt begabt ist, und

die gegenwärtige Lage der Gebilde, die sie zusammensetzen, und die überdies umfassend genug wäre, diese Kenntnisse der Analyse zu unterwerfen, würde in der gleichen Formel die Bewegungen der größten Himmelskörper und die des leichtesten Atoms einbegreifen. Nichts wäre für sie ungewiss, Zukunft und Vergangenheit lägen klar vor ihren Augen."

Leider ist unsere Intelligenz nicht so umfassend wie Laplace möchte und eine solche Formel zu finden ist uns bis heute nicht gelungen. Trotzdem sagte Dirichlet 1858 zu seinem jungen Freund Kronecker, er habe eine stufenweise Annährung an die Lösung des n-Körperproblem gefunden. Dirichlet starb nach einem Jahr und keine Spur von einer solchen Lösung wurde in seinen Werken gefunden. Weierstraß dachte, dass Dirichlet eine Reihenentiwicklung gefunden hätte und machte sich an die Arbeit die verlorene Lösung nachzuvollziehen:

„Du erinnerst Dich, liebes Herz, daß wir zu der Zeit, als unsere Freundschaft eine innige geworden war, sodaß ich zuweilen das Bedürfnis empfand, auch über Arbeiten, die ich gern machen möchte, mit Dir zu reden und wir uns auch wohl in wissenschaftliche Träume und Phantasie verloren, oftmals von den Bedingungen der Stabilität des Weltsystems gesprochen haben."

Als Mittag-Leffler 1884 ein Preisausschreiben für seine mathematischen Zeitschrift *Acta Mathematica* mit der Förderung von Leopold II König von Schweden und Norwegen organisiert, schlug Weierstraß als Problem für die Kandidaten vor, eine Reihenentwicklung für die n-Körperproblem zu finden. Der Preis wurde 1889 Poincaré zuerkannt auch wenn er die Lösung nicht finden konnte, denn seine ursprüngliche Lösung enthielt ein Fehler. Trotzdem, hat er mit seiner Preisschrift zum Geburt einer neuen Branche der Mathematik beigetragen: die qualitative Theorie eines dynamischen Systems, die das Verhalten der Lösungen von einer Differentialgleichung im großen untersucht.

1912 starb Poincaré und erschien das Werk von Sundman *Mémoirs sur les problèm des trois corps*, wo schließlich eine Reihenentwicklung für das Dreikörperproblem angegeben wurde. Auch wenn die Konvergenzrate der Sundmans Reihe sehr langsam und von keiner praktischen Anwendung ist, gibt seine Arbeit wichtige Informationen um die Zusammenstößen von Körpern, die wir auch später betrachten werden.