15 Inversionen: Definitionen 14.6.

Um die stereographische Projektion besser zu verstehen betrachten wir nun Inversionen in $\mathbb{R}^n$ oder Kugelspiegelungen, die auch von Steiner eingeführt wurden.

Definition 15.1. Es sei $\mathcal{S}_*$ eine $(n-1)$-Sphäre in $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt $\mathbf{M}_*$ und Radius ρ_*. Die positive, beziehungsweise negative, Inversion an S_* ist die Abbildung $I_*^{\pm} : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$, die auf folgender Weise definiert ist. Für alle Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{M}_*\}$ liegt $I_*^{\pm}(\mathbf{x})$ auf der Gerade $\mathbf{M}_* + \mathbb{R}(\mathbf{x} - \mathbf{M}_*)$ und

$$\langle I_*^+(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_*, \mathbf{x} - \mathbf{M}_* \rangle = +\rho_*^2, \qquad \langle I_*^-(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_*, \mathbf{x} - \mathbf{M}_* \rangle = -\rho_*^2.$$

Schließlich setzen wir $I_*^{\pm}(\mathbf{0}) = \infty$ und $I_*^{\pm}(\infty) = \mathbf{0}$.

Inversionen besitzen folgende vier Eigenschaften:

1. Es gilt die Formel
$$|I_*^{\pm}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_*| \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{M}_*| = \rho_*^2, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{M}_*\}. \tag{15.1}$$

2. Die Punkte im Inneren von $\mathcal{S}_*$ sind im Äußeren von $\mathcal{S}_*$ abgebildet und umgekehrt. Wir haben $I_*^+(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ genau dann, wenn $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_*$. Die Einschränkung von I_*^+ auf $\mathcal{S}_*$ ist die Identität. Wenn $A_* : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$ die antipodale Abbildung mit Mittelpunkt $\mathbf{M}_*$ ist, haben wir $I_*^-(\mathbf{x}) = A_*(\mathbf{x})$ genau dann, wenn $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_*$.

3. Die Inversionen sind Involutionen. Das heißt, dass $I_*^+(I_*^+(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ und $I_*^-(I_*^-(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n$. Insbesondere sind I_*^+ und I_*^- bijektiv.

4. Es gilt die Formel $I_*^- = I_*^+ \circ A_*$.

Aufgabe 15.2. *Beweisen Sie die obigen vier Eigenschaften. Leiten Sie eine Formel für die positive und negative Inversion her.*