22 Das n-Körperproblem 9.7.

22.1 Der allgemeine Fall

Wir betrachten nun n-Körper $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ im 3-dimensionalen euklidischen Raum mit positiven Massen $m_1, \dots, m_n$, die sich unter der Wirkung der gegenseitigen Gravitationskraft bewegen. Also, wir haben das folgende System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die wir *(gravitationales) n-Körperproblem* nennen,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} -\frac{G m_i m_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{22.1}$$

wobei G die universelle Gravitationskonstante und m_j die Masse von $\mathbf{r}_j$ sind und wir die Notation

$$\mathbf{r}_{ij} := \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \qquad r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$$

benutzt haben. Wir bemerken, dass $\mathbf{r}_{ij} = -\mathbf{r}_{ji}$ und deshalb $r_{ij} = r_{ji}$. Unser System wird wohldefiniert sein, wenn die Körper verschiedene Lagen im Raum besetzen. Das heißt, dass der Gesamtvektor $\mathbf{r} := (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ zum Komplement der dicken Diagonale gehört:

$$\Delta^c := \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta, \qquad \Delta := \Big\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n} \;\Big|\; \exists\, i \neq j, \;\; \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j \Big\}.$$

Aufgabe 22.1. *Wie kann man die kompakten Mengen von Δ^c charakterisieren?*

Wir benutzen die folgende Notation für den Gradient einer Funktion $u : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$:

$$\operatorname{grad} u = (\operatorname{grad}_1 u, \cdots, \operatorname{grad}_n u), \qquad \operatorname{grad}_i u := \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial y_i}, \frac{\partial u}{\partial z_i} \Big) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall\, i = 1, \dots, n,$$

wobei $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$.

Aufgabe 22.2. *Es seien $i \neq j$ und betrachte man die Funktion $r_{ij} : \Delta^c \to \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass für alle $\ell = 1, \dots, n$*

$$\operatorname{grad}_\ell r_{ij} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{wenn } \ell \neq i, j; \\ \hat{\mathbf{r}}_{ij}, & \text{wenn } \ell = i; \\ \hat{\mathbf{r}}_{ji}, & \text{wenn } \ell = j. \end{cases} \tag{22.2}$$

22.2 Das eingeschränkte n-Körperproblem

Wenn wir beide Seiten der Gleichung (22.1) durch m_i teilen, bekommen wir

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} -\frac{G m_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}. \tag{22.3}$$

Diese Gleichung hat physikalische Bedeutung auch wenn einige der Massen, zum Beispiel $m_{n'+1}, \ldots, m_n$, die wir *Satelliten* nennen, viel kleiner als der Massen $m_1, \ldots, m_{n'}$, die wir *Primärkörper* nennen, sind. In diesem Fall können wir in (22.3) $m_{n'+1} = \ldots = m_n = 0$ setzen. Dann beinflusst ein Satellit die Bewegung eines anderen Satellites oder eines Primärkörpers nicht. Also lösen die Primärkörper das n'-Körperproblem

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} -\frac{G m_i m_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, n', \tag{22.4}$$

während jeder Satellit $\mathbf{r}_i$ die Gleichung

$$\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}_i(t)), \qquad \mathbf{F}(t, \mathbf{r}_i) := -\sum_{j=1}^{n'} \frac{G m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j(t)|^2} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j(t)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j(t)|} \tag{22.5}$$

löst. In (22.5) werden die Bahnen $t \mapsto \mathbf{r}_j(t)$ für $j = 1, \ldots, n'$ als bekannten betrachtet und deshalb ist solche Gleichung *nicht autonom*, weil ihre rechte Seite explizit von der Zeit t abhängt. Die Formel für die Kraft $\mathbf{F}$ auf $\mathbf{r}_i$ hängt nur von den Primärkörpern und nicht von i ab. Deswegen ist es genug den Fall $n' = n - 1$ (d.h. , es gibt nur einen Satelliten) zu betrachten. Dieser Fall ist der sogenannte *eingeschränkte n-Körperproblem*, wobei oft zusätzliche Bedingungen auf der Bewegung der $n - 1$ Primärkörper verlangt werden.

Also, unser Ziel wird das System (22.1) von Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu behandeln. Dafür werden wir aus diesem System eine einzige Differentialgleichung in einem höheren dimensionalen Raum gewinnen und dann auf die Theorie, die wir in Vorlesung 3 und 4 entwickelt haben, zurückgreifen.

22.3 Konservative Systeme

Wir betrachten nur Systeme zweiter Ordnung der Art

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_n) \\ \qquad \ldots \\ m_n \ddot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_n) \end{cases}$$

ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wobei $m_i \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{r}_i : I \to \mathbb{R}^k$ Vektorfunktionen und $\mathbf{F}_i : \mathscr{R} \times (\mathbb{R}^k)^n \to \mathbb{R}^k$ die Kräfte sind und $\mathscr{R}$ eine offene Teilmenge des $(\mathbb{R}^k)^n$ ist. Die Kurven $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n : I \to \mathbb{R}^d$ lösen dieses Gleichungssystem genau dann, wenn $\mathbf{r} := (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) : I \to \Omega$ die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung löst:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \tag{22.6}$$

wobei die Trägheit und die Kraft definiert als

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} m_1 \mathbf{I}_3 & \ldots & \ldots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ldots & m_n \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) := \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \end{pmatrix}. \tag{22.7}$$

sind. Wir definieren die kinetische Energie des Systems $T : \mathbb{R}^{3n} \to [0, +\infty]$ als

$$T(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2_{\mathbf{M}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Wir möchten nun das System (22.1) untersuchen durch das Studieren von allgemeineren Systemen der Art

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) := -\sum_{j \neq i} \nu_{ij} f(r_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij}, \tag{22.8}$$

wobei ν_{ij} die Einträge einer symmetrischer Matrix $\nu \in S(n)$ sind und $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ irgendwelche Funktion ist. Für (22.1) haben wir $\nu_{ij} = m_i m_j$ und $f(r) = G/r^2$.

Definition 22.3. Der lineare Impuls des Systemes ist

$$\mathbf{p} := \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i$$

und der Schwerpunkt des Systemes ist

$$\mathbf{r}_S := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i,$$

wobei $m := m_1 + \ldots + m_n$ die gesamte Masse des Systemes ist.

Hilfsatz 22.4. *Der lineare Impuls ist ein erstes Integral für* (22.8)*. Deshalb gibt es* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ *mit*

$$\mathbf{r}_S = t\,\frac{\mathbf{p}}{m} + \mathbf{q}.$$

Beweis. Wir berechnen

$$\dot{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{v}}_i = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \nu_{ij} f(r_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij} = -\sum_{i<j} \nu_{ij} f(r_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij} - \sum_{j<i} \nu_{ij} f(r_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij} \tag{22.9}$$

Wenn wir die Namen der Indizen umtauschen, gewinnen wir

$$\sum_{j<i} \nu_{ij} f(r_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij} = \sum_{i<j} \nu_{ji} f(r_{ji}) \hat{\mathbf{r}}_{ji} = \sum_{i<j} \nu_{ij} f(r_{ij}) (-\hat{\mathbf{r}}_{ij}) = -\sum_{i<j} \nu_{ij} f(r_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij}.$$

Also die zwei Summen in (22.9) kürzen sich ab und die Aussage ist bewiesen. $\square$

Es seien nun $\mathbf{r}_i$ Lösungen von (22.8). Wir führen Kurven $\tilde{\mathbf{r}}_i := \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S$ ein, sodass

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \qquad \tilde{\mathbf{r}}_S = \mathbf{q}.$$

Wir werden auch das Koordinatensystem wählen, sodass $\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Also $\tilde{\mathbf{r}}_S = \mathbf{0}$. Da $\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$, $\ddot{\tilde{\mathbf{r}}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i$ und $\tilde{\mathbf{r}}_{ij} = \mathbf{r}_{ij}$, lösen die neuen Kurven immer noch das System (22.8).

22.4 Anwendung zum Zweikörperproblem

Wir nehmen $n = 2$ in (22.1). Nach der obigen Diskussion können wir annehmen, dass $m\mathbf{r}_S = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$. Es folgt daraus, dass

$$\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{r}_1, \qquad \mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{r}_2, \tag{22.10}$$

also $\mathbf{r}_1$ liegt zu jeder Zeit auf der anderen Seite von $\mathbf{r}_2$ bezüglich dem Schwerpunkt $\mathbf{r}_S = \mathbf{0}$ und $r_2/r_1 = m_1/m_2$, das heißt, dass das schwerere Körper näher zum Schwerpunkt ist. Wir finden also $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \frac{m}{m_2}\mathbf{r}_1 = -\frac{m}{m_1}\mathbf{r}_2$. Mit Hilfe dieser Formel ist das Zweikörperproblem äquivalent zu

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -G\frac{m_2^3}{m^2}\frac{1}{r_1^2}\hat{\mathbf{r}}_1, \qquad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G\frac{m_1^3}{m^2}\frac{1}{r_2^2}\hat{\mathbf{r}}_2. \tag{22.11}$$

Also jeder Körper ist eine Lösung des keplerschen Problems mit Konstanten Gm_2^3/m^2 und Gm_1^3/m^2. Jede Lösung bestimmt die andere durch die Formel (22.10). Die Kurven $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ liegen auf der gleichen Ebene oder gleichen Gerade, wenn $\mathbf{c} = 0$, und beschreiben die selbe Art von Kegelschnitt.

Aufgabe 22.5. *Es sei angenommen, dass $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ Ellipsen beschreiben, die sich in einem Punkt berühren. Finden Sie das Verhältnis der Massen der zwei Körper als Funktion der Exzentrizität e. Wie schwerer muss der erste Körper als der zweite sein, wenn $e = 1/2$?*

Aufgabe 22.6. *Beweisen Sie das dritte Keplergesetz für zwei Körper mit Summe der Massen gleich m und Abstand gleich a, die sich in Kreisbahnen bewegen. Leiten Sie eine ähnliche Formel, wenn die Körper sich in elliptischen Bahnen bewegen und der minimale und maximale Abstand zwischen der Körper sind $a_{\min}$ und $a_{\max}$.*

Aufgabe 22.7. *Es sei $\mathbf{r}_1$ die Sonne und $\mathbf{r}_2$ die Erde. Wir möchten nun r_1, das heißt den Abstand zwischen der Sonne und dem Schwerpunkt des Zweikörpersystems, berechnen mit Hilfe der Formel $r_1 = (Gm_2)r_2/(Gm_1)$. Wir nehmen an, dass die Bahnen Kreis sind.*

Die Masse der Erde mal die Gravitationskonstante lässt sich mit einfachen Experimenten berechnen. Man findet $Gm_2 = 4 \cdot 10^{14} m^3/s^2$. Der Abstand r_2 zwischen der Erde und der Sonne ist $r_2 = 1,5 \cdot 10^{11} m$. Diese Größe ist praktisch in zwei Schritte bestimmt. Erstmal betrachtet man ein weiteres Planet $\mathbf{r}_3$ (zum Beispiel Mars) und findet man den relativen Abstand durch das dritte keplersche Gesetz $r_2/r_3 = (p_2/p_3)^{2/3}$, wobei p_2 und p_3 die Periode der Planeten sind. Dann berechnet man r_3 mit Hilfe der Parallaxe. Der erste Wissenschaftler, der 1672 eine befriedigende Vermessung von r_3 erhielt, war Giovanni Domenico Cassini. Da m_1 viel größer als m_2 ist, haben wir $Gm_1^3/m^2 \sim Gm_1$. Daher lässt sich die zweite Gleichung in (22.11) durch die Gleichung $\ddot{\mathbf{r}}_2 = -Gm_1\frac{1}{r_2}\hat{\mathbf{r}}_2$ approximieren. Da die Revolutionszeit der Erde um die Sonne bekannt ist, können wir mit Hilfe des dritten keplerschen Gesetzes finden

$$Gm_1 = \frac{4\pi^2 \cdot r_2^3}{p_2^2} = \frac{4\pi^2(1,5)^3 \cdot 10^{33}}{(3 \cdot 10^7)^2} m^3/s^2 = 1,5 \cdot 10^{20} m^3/s^2.$$

Also ergibt es sich $r_1 = 4 \cdot 10^5 m = 400\,km = \frac{6}{1000}$ Radius der Sonne.