6 Dynamik auf $\mathbb{R}^+$:unbeschränkte Bahnen 7.5.

Unser zweites und drittes Resultat beschreiben die Dynamik für Werte der Energie, die eine gewissene Regularitätsbedingung erfüllen. Wir brauchen erstmal einen Hilfsatz.

Hilfsatz 6.1. *Es sei $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ und $[\rho_0, \rho_1] \subset \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft*

$$U(r) < h, \qquad \forall\, r \in [\rho_0, \rho_1].$$

Es sei v_0 die einzige positive Zahl mit $E(\rho_0, v_0) = h$ und $r_{(\rho_0,v_0)} : I_{(\rho_0,v_0)} \to \mathbb{R}^+$ die entsprechende maximale Lösung. Dann gibt es $\tau > 0$ mit $r_{(\rho_0,v_0)}(\tau) = \rho_1$ und $\dot{r}_{(\rho_0,v_0)}(t) > 0$ für alle $t \in [0, \tau]$.

Beweis. Nach der Voraussetzung gibt es $\epsilon > 0$ mit

$$r_{(\rho_0,v_0)}(t) \in [\rho_0, \rho_1] \quad \Longrightarrow \quad \dot{r}_{(\rho_0,v_0)}(t) \geq \epsilon, \qquad \forall\, t \in I_{(\rho_0,v_0)} \tag{6.1}$$

Es sei nun $T := \sup I_{(\rho_0,v_0)}$. Wir nehmen per Widerspruch an, dass $r_{(\rho_0,v_0)}(t) < \rho_1$ für alle $t \in [0, T)$. Erstens sehen wir, dass $\dot{r}_{(\rho_0,v_0)}(t) > 0$ für alle $t \in [0, T)$. Wenn das nicht passiert, gibt es $t_1 \in [0, T)$ mit $\dot{r}_{(\rho_0,v_0)}(t_1) = 0$ und $\dot{r}_{(\rho_0,v_0)}(t_1) > 0$ für alle $t \in [0, t_1)$. Das impliziert die Bedingung $r_{(\rho_0,v_0)}(t_1) \geq \rho_0$, die die Implikation (6.1) widerspricht. Also $r_{(\rho_0,v_0)}$ ist monoton steigend auf $[0, T)$ und deswegen im kompakten Interval $[\rho_0, \rho_1]$ enthalten. Nach Satz 4.5 bekommen wir $T = +\infty$. Nach dem Fundamentalsatz der Integralrechnung schätzen wir

$$r_{(\rho_0,v_0)}(t) = \rho_0 + \int_0^t \dot{r}_{(\rho_0,v_0)}(s)\mathrm{d}s \geq \rho_0 + t\epsilon$$

ab und die rechte Seite ist größer als ρ_1 für t groß genug. □

Wir untersuchen jetzt die Dynamik auf den unbeschränkten Komponenten der Hillsregionen.

Satz 6.2. *Es seien $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ und $r_0 \in \mathbb{R}^+$ mit den Eigenschaften*

$$\bullet \;\; U(r) < h, \;\; \forall\, r > r_0, \qquad \bullet \;\; U(r_0) = h, \quad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r_0) < 0. \tag{6.2}$$

Es sei $r_{r_0} : I_{r_0} \to \mathbb{R}^+$ die maximale Lösung von $\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r)$ mit $(r_{r_0}(0), \dot{r}_{r_0}(0)) = (r_0, 0)$. Dann haben wir $I_{r_0} = (-T, T)$ für irgendwelche $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ und

$$\bullet \;\; r_{r_0}(t) = r_{r_0}(-t), \;\; \forall\, t \in (-T, T), \qquad \bullet \;\; \dot{r}_{r_0}(t) > 0, \;\; \forall t \in (0, T), \qquad \bullet \;\; \lim_{t \to T} r_{r_0}(t) = +\infty.$$

Letztendlich gilt $\big\{(r_{r_0}(t), \dot{r}_{r_0}(t)) \;\big|\; t \in (-T, T)\big\} = \big([r_0, +\infty) \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h)$.

Beweis. Wir setzen $r' : -I_{r_0} \to \mathbb{R}^+$, $r'(t) = r_{r_0}(t)$, für alle $t \in -I_{r_0}$. Dann $r'(0) = r_{r_0}(0) = 0$ und $\dot{r}'(0) = -\dot{r}_{r_0}(-0) = 0$. Aus Satz 3.5 folgt es, dass $r_{r_0} = r'$ auf $I_{r_0} \cap (-I_{r_0})$. Die Maximalität von r_{r_0} impliziert, dass $I_{r_0} = -I_{r_0}$. Also $I_{r_0} = (-T, T)$ für irgendwelche $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Da $\ddot{r}_{r_0}(0) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r_0) > 0$ gilt, gibt es ein $t_0 > 0$ mit $\dot{r}_{r_0}(t) > 0$ für alle $t \in (0, t_0]$. Es sei nur eine Folge $r_k \to +\infty$. Wir wenden nun Hilfsatz 6.1 mit $\rho_0 = r_{(r_0)}(t_0)$ und $\rho_1 = r_k$ an und es sei $\tau = t_k > 0$ die Zahl, die wir daher bekommen. Als $r_k \to +\infty$ wir sehen, dass $t_k \to T$. Daher ist $\dot{r}_{r_0}(t) > 0$ für alle $t \in [t_0, T)$ und $\lim_{t \to T} r_{r_0}(t) = +\infty$.

Es bleibt die letzte Aussage zu beweisen. Wir sehen, dass $(r, v) \in ([r_0, +\infty) \times \mathbb{R}) \cap E^{-1}(h)$ genau dann, wenn $r \geq r_0$ und $v = \sqrt{2}\sqrt{h - U(r)}$ oder $v = -\sqrt{2}\sqrt{h - U(r)}$. Es sei $t \in [0, T)$ mit $r_{r_0}(t) = r$. Dann $v = \dot{r}_{r_0}(t)$, wenn $v \geq 0$ ist und $v = \dot{r}_{r_0}(-t)$, wenn $v \leq 0$ ist. □

Wir möchten nun die Dynamik beschreiben, wenn die komponente der Hillsregion ein Intervall ist. Zu diesem Zweck definieren wir erst genauer, was die Periode einer Kurve ist.

Definition 6.3. Es sei M eine Menge und $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to M$ eine Funktion. Eine Zahl $p \in \mathbb{R}$ heißt Periode von $\mathbf{x}$, wenn

$$\mathbf{x}(t + p) = \mathbf{x}(t), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren die Periodengruppe $\mathcal{P}(\mathbf{x})$, als die Menge aller Perioden von $\mathbf{x}$ und sagen, dass $\mathbf{x}$ periodisch ist, wenn $\mathcal{P}(\mathbf{x}) \neq \{0\}$. Es sei nun $\mathbf{x}$ periodisch. Wenn $\mathbf{x}$ stetig, nicht konstant und M ein hausdorffscher topologischer Raum ist, heißt das kleinste Element in $\mathcal{P}(\mathbf{x}) \cap \mathbb{R}^+$ die minimale Periode von $\mathbf{x}$.

Aufgabe*. *Es sei M eine Menge und $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to M$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass $\mathcal{P}(\mathbf{x})$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ ist und dass entweder $\mathcal{P}(\mathbf{x})$ dicht ist oder $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = P\mathbb{Z}$ für $P \geq 0$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass, wenn $\mathbf{x}$ periodisch ist, dann $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = P\mathbb{Z}$ mit $P > 0$ gilt, falls $\mathbf{x}$ stetig, nicht konstant und M ein hausdorffscher topologischer Raum ist.*