12 Numerische und geometrische Lösungen der KG 4.6.

Es sei $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine regularisierte Lösung des keplerschen Problems mit negativer Energie. Um die Lage von $\mathbf{r}$ zu einer gewissenen Zeit t zu bestimmen, muss man die Kepler-Gleichung

$$u - e \sin u = M(t)$$

nach u lösen. Schon Kepler bezweifelte die Existenz einer geschlossenen Formel für u und schrieb

"Mir genügt die Überzeugung, dass eine Lösung apriori nicht möglich ist wegen der heterogenen Beschaffenheit von Bogen und Sinus. Wer immer mir aber einen Irrtum und einen Ausweg nachweist, der sei mir ein großer Mathematiker gleich Apollonius.".

Wir werden nun zwei numerische Verfahren beschreiben, die eine Annährung der Lösung geben, wenn $e < 1$.

12.1 Banach-Fixpunktsatz

Wir erinnern uns an den Fixpunktsatz von Banach. Es sei (U, d) ein nicht leerer vollständiger metrischer Raum und $f : U \to U$ eine Kontraktion. Das heißt, dass es $\lambda < 1$ gibt mit $d(f(u), f(w)) \leq \lambda d(u, w)$, für alle $u, w \in U$. Dann f besitzt genau einen Fixpunkt $\bar{u} \in U$, nämlich einen Punkt mit $f(\bar{u}) = \bar{u}$. Außerdem, für jeden $u_0 \in U$ konvergiert die Folge $u_{n+1} := f(u_n)$ nach $\bar{u}$.

In unserem Fall nehmen wir $U = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(u) = e \sin u + M(t)$. Dann f ist eine Kontraktion mit $\lambda = e$, weil

$$|F(u_2) - F(u_1)| = e|\sin u_2 - \sin u_1| \leq e \max_{u \in \mathbb{R}} |f'(u)| \cdot |u_2 - u_1| = e|u_2 - u_1|,$$

wobei $f'(u) := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(u) = \cos u$. Der Fixpunkt $\bar{u}$ von F genügt dann der Kepler-Gleichung

$$\bar{u} = F(\bar{u}) = e \sin \bar{u} + M(t).$$

12.2 Newtonsverfahren

Es sei nun $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $g'(w) := \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}w}(w) > 0$ für alle $w \in \mathbb{R}$. Wenn g_0 eine reelle Zahl ist, möchten wir Werte $u \in \mathbb{R}$ finden mit $g(u) = g_0$. Wenn $w \in \mathbb{R}$ definieren wir $N(w) \in \mathbb{R}$ so dass $(N(w), g_0) \in \mathbb{R}^2$ der Schnittpunkt zwischen der Gerade $y = g_0$ und der Tangente am Graph $\{(u, g(u)) \mid u \in \mathbb{R}\big|\}$ im Punkt $(w, g(w))$. Da ein Punkt (x, y) zur Tangente gehört genau dann, wenn $y = g(w) + g'(w)(x - w)$, finden wir

$$N(w) = w - \frac{g(w) - g_0}{g'(w)}.$$

Für jede $u_0 \in \mathbb{R}$ definieren wir die Folge $u_{n+1} = N(u_n)$. Wenn u_n gegen $\bar{u}$ konvergiert würde, gälte

$$\bar{u} = N(\bar{u}) = \bar{u} - \frac{g(\bar{u}) - g_0}{g'(\bar{u})}.$$

Das heißt $\bar{u}$ genügt der Gleichung $g(\bar{u}) = g_0$. Um die Konvergenz zu sichern, setzen wir die Konvexität oder die Konkavität der Funktion g voraus. Genauer nehmen wir ein, dass es u_{-1}, u_0 gibt mir $g(u_{-1}) \leq g_0$, $g(u_0) \geq g_0$ und $g''(u) \geq 0$ für alle $u \in [u_{-1}, u_0]$. Die Bedingung auf die zweite Ableitung impliziert, dass die Folge $u_{n+1} = N(u_n)$ monoton fallend ist und die untere Schranke u_{-1} besitzt. Also die Folge konvergiert. Eine ähnliche Aussage gilt für Funktionen g, so dass Werte u_{-1}, u_0 existieren mit $g(u_{-1}) \geq g_0$, $g(u_0) \leq g_0$ und $g''(u) \leq 0$ für alle $u \in [u_0, u_{-1}]$.

In unserem Fall nehmen wir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(u) = u - e \sin u$ und $g_0 = M(t)$. Die Ableitung von g ist immer positiv für $e < 1$. Außerdem $g''(u) > 0$ für $u \in (k\pi, (k+1)\pi)$ mit k gerade und $g''(u) < 0$ für $u \in (k\pi, (k+1)\pi)$ mit k ungerade.

Satz 12.1. *Wenn $M(t)$ im Intervall $[2k'\pi, 2(k'+1)\pi]$ für irgendelweche $k' \in \mathbb{Z}$ liegt, konvergiert das Newtonsverfahren mit $u_0 = (2k'+1)\pi$ nach der Lösung der Kepler-Gleichung.*

Beweis. Wir haben $g(k\pi) = k\pi$ für alle ganze Zahlen k. Wenn $M(t) \in [2k'\pi, (2k'+1)\pi]$, setzen wir $u_{-1} = 2k'\pi$, so dass g auf $[u_{-1}, u_0]$ konvex ist und $g(u_{-1}) = u_{-1} \leq M(t) \leq u_0 = g(u_0)$. Wenn $M(t) \in [(2k'+1)\pi, 2(k'+1)\pi]$, setzen wir $u_{-1} = 2(k'+1)\pi$, so dass g auf $[u_0, u_{-1}]$ konkav ist und $g(u_0) = u_0 \leq M(t) \leq u_{-1} = g(u_{-1})$ □

12.3 Die verkürzte Zykloide

Wir geben schließlich ein geometrisches Verfahren, das eine Lösung der Kepler-Gleichung bestimmt. Es sei $\mathcal{D}'$ eine Scheibe mit Mittelpunkt $\mathbf{M}$ in der Ebene. Wir betrachten eine Unterscheibe $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$ mit gleichem Mittelpunkt $\mathbf{M}$. Wir schreiben $a > 0$ für den Radius von $\mathcal{D}$ und a/e mit $e \in (0, 1]$ für den Radius von $\mathcal{D}'$. Die zwei Scheiben bewegen sich als ein einziger starrer Körper und wir markieren einen Punkt P_0 auf dem Rand von $\mathcal{D}$.

Definition 12.2. Die verkürzte Zykloide ist die Kurve $\mathbf{s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die ein Punkt P_0 auf dem Umfang von $\mathcal{D}$ beschreibt, wenn $\mathcal{D}'$ mit Einheitswinkelgeschwindigkeit auf einer festen Gerade abrollt.

Wir möchten nun eine Parametrisierung für $\mathbf{s}$ durch den Wälzwinkel u geben, nämlich den Winkel zwischen $\mathbf{M} + \mathbb{R}^+(\mathbf{s} - \mathbf{M})$ und einer fester Halbgerade $\mathbf{M} + \mathbb{R}^+\hat{\mathbf{e}}$ mit $\mathbf{e} \in S^1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $\hat{\mathbf{e}} = (1, 0)$, die Gerade die y-Achse ist, $\mathcal{D}'$ sich links der y-Achse befindet, der Mittelpunkt $\mathbf{M}$ auf der x-Achse für $u = 0$ liegt.

Satz 12.3. *Unter der obigen Voraussetzungen lautet die Parametrisierung der verkürzten Zykloide nach dem Wälzwinkel*

$$u \mapsto \mathbf{s}(u) = \frac{a}{e}(e \cos u - 1, e \sin u - u), \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Es sei $Q(u) = (0, y(u))$ der Berührungspunkt zwischen der Scheibe $\mathcal{D}'$ und der y-Achse. Das Abrollen sagt uns, dass $|u| = |y(u)|$. Da $u > 0$ genau dann, wenn $y(u) < 0$ bekommen wir $y(u) = -au$. Nun $\mathbf{M}(u) = (-a/e, y(u))$ und $\mathbf{s}(u) = \mathbf{M}(u) + a(\cos u, \sin u)$. Das substituieren von $\mathbf{M}$ und $y(u)$ liefert die gewünschte Formel. □

Folgerung 12.4. *Der Wälzwinkel $u(t)$, der dem Schnittpunkt $\mathbf{s}(u(t))$ zwischen der verkürzten Zykloide und der Gerade $y = -\frac{a}{e}M(t)$ entspricht, ist die Lösung der Kepler-Gleichung.*

Beweis. Wenn der Punkt $\mathbf{s}(u)$ die y-Koordinate $-\frac{a}{e}M(t)$ besitzt, folgt aus dem Satz 12.3 die Formel

$$-\frac{a}{e}M(t) = \frac{a}{e}(e \sin u - u),$$

die äquivalent zur Kepler-Gleichung ist. □