5 Konservative zentrale Kräfte 3.5.

5.1 Klassifizierung

Satz 5.1. *Eine Zentralkraft ist konservativ genau dann, wenn f nur von dem Abstand r von $\mathbf{0}$ abhängt. Das heißt, dass es eine Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f = \tilde{f} \circ r$ gibt. In diesem Fall lässt sich auch das Potential $U : \mathbb{R}^3_\times \to \mathbb{R}$ als $U = \tilde{U} \circ r$ schreiben, wobei die Funktion $\tilde{U} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ durch die Gleichung*

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{U}}{\mathrm{d}r} = \tilde{f}$$

bis auf einer additiven Konstante bestimmt wird.

Beweis. Es sei angenommen, dass $\mathbf{F} = -\mathrm{grad}\, U$. Dann die Rotation von $\mathbf{F}$ verschwindet

$$0 = \mathrm{rot}\, \mathbf{F} = -\mathrm{rot}\big(f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}\big) = -\mathrm{grad}\, f \times \hat{\mathbf{r}} - f(\mathbf{r})\mathrm{rot}\, \hat{\mathbf{r}} = -\mathrm{grad}\, f \times \hat{\mathbf{r}},$$

wo wir benutzt haben, dass die Rotation von $\hat{\mathbf{r}}$ verschwindet, weil $\hat{\mathbf{r}} = \mathrm{grad}\, r$. Es folgt daraus, dass $\mathrm{grad}\, f$ parallel zum $\mathbf{r}$ ist. Es seien nun $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$ zwei Punkte in $\mathbb{R}^3_\times$ mit $br_0 = br_1$. Es existiert dann eine Kurve $\mathbf{r} : [0,1] \to \{r = r_0\}$ mit $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ und $\mathbf{r}(1) = \mathbf{r}_1$. Wir leiten die Gleichung $\langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t)\rangle \equiv r_0^2$ nach t ab und bekommen $\langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}\rangle = 0$. Nach dem Fundamentalsatz der Integralrechnung

$$f(\mathbf{r}_1) - f(\mathbf{r}_0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(f \circ \mathbf{r})}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \langle \mathrm{grad}\, f(\mathbf{r}(t)), \dot{\mathbf{r}}(t)\rangle \mathrm{d}t = 0,$$

denn $\mathrm{grad}\, f$ parallel zu $\mathbf{r}$ ist.

Es sei umgekehrt angenommen, dass $f = \tilde{f} \circ r$ und es sei $\tilde{U}$ definiert durch $\frac{\mathrm{d}\tilde{U}}{\mathrm{d}r} = \tilde{f}$. Dann

$$\mathbf{F} = -(\tilde{f} \circ r)\hat{\mathbf{r}} = -\Big(\frac{\mathrm{d}\tilde{U}}{\mathrm{d}r} \circ r\Big)\mathrm{grad}\, r = -\mathrm{grad}\,(\tilde{U} \circ r). \qquad \square$$

Aufgabe 5.2. *Es sei $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3_\times \to \mathbb{R}^3$ eine konservative Zentralkraft und $\mathbf{Q} \in O(3)$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3_\times$ eine Lösung von $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist, genau dann wenn $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3_\times$ eine Lösung von $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist.*

Explizite Lösungen von $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, wobei $\mathbf{F}$ eine konservative Zentralkraft ist, sind nur für wenige Potentiale $\tilde{U} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bekannt. Einer der berühmten Fällen ist der Folgende.

Example 5.3 (Der isotrope harmonische Oszillator)**.** Es sei $\tilde{U}(r) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2$, wobei $\omega > 0$. In diesem Fall lautet die Gleichung $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r},$$

sodass die rechte Seite auf dem ganzen $\mathbb{R}^3$ glatt ist (keine Singularität in $\mathbf{0}$). Wir suchen nach Lösungen, die in der xy-Ebene definiert sind. Also sind Funktionen x und y zu finden, die die Gleichungen

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \ddot{y} = -\omega^2 y$$

erfüllen. Eine Lösung mit beliebigem Anfang $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ und $(\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (v_0^x, v_0^y)$ ist durch die Formeln

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0^x}{\omega} \sin \omega t, \qquad y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0^y}{\omega} \sin \omega t$$

gegeben. Insbesondere sind die maximalen Lösungen für alle reellen Zeiten definiert und besitzen eine Periode $2\pi/\omega$, die daher unabhängig von den Anfangswerten ist. Aus der Periodizität folgt, dass ein $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt, wo $t \mapsto x^2(t) + y^2(t)$ ihren Maximum erhält. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, kann man $t_0 = 0$ und $(x_0, y_0) = (a, 0)$, wobei $a \geq 0$, annehmen. Nach der Definition von t_0 stehen (x_0, y_0) und (v_0^x, v_0^y) senkrecht zueinander. Daher $(v_0^x, v_0^y) = (0, b\omega)$ mit $b \in \mathbb{R}$. Bis auf der Umparametrisierung $t \mapsto -t$ haben wir $b \geq 0$. Die obigen Gleichung nehmen daher eine einfachere Gestalt

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{pmatrix}.$$

Die Kurve (x, y) parametrisiert eine Ellipse mit Halbachsen a und b gegen den Uhrzeigersinn.

Aufgabe 5.4. *Es sei* $\mathbf{r}$ *eine Lösung von* $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}$ *mit Energie* $h > 0$ *und Drehimpuls* $(0, 0, c)$ *mit* $c \in \mathbb{R}$. *Zeigen Sie, dass* $h \geq \omega|c|$ *und dass die Halbachsen der Ellipse durch die Formel*

$$\frac{1}{\sqrt{2}\omega}\Big(\sqrt{h + \omega|c|} \pm \sqrt{h - \omega|c|}\Big)$$

gegeben sind.

5.2 Reduzierung zu einer Dimension

Satz 5.5. *Es sei* $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3_\times$ *eine Lösung von* $\ddot{\mathbf{r}} = -\tilde{f}(r)\hat{\mathbf{r}}$ *in der Ebene* $\{z = 0\}$, *so dass* $\mathbf{c} = (0, 0, c)$, *für* $c \in \mathbb{R}$. *Wenn* (r, θ) *die Polarkoordinaten von* $\mathbf{r}$ *sind und das effektive Potential* $\tilde{U}_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *als*

$$\tilde{U}_c(r) := \frac{c^2}{2r^2} + \tilde{U}(r)$$

definiert wird, gilt

$$\begin{cases} \ddot{r} = -\dfrac{\mathrm{d}\tilde{U}_c}{\mathrm{d}r}(r) \\ \dot{\theta} = \dfrac{c}{r^2}. \end{cases} \tag{5.1}$$

Insbesondere, bewegt sich r *unter einer konservativen Kraft mit entsprechender Energie* $\tilde{E}_c : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und es gilt* $\tilde{E}_c(r, \dot{r}) = E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.

Beweis. Die zweite Gleichung in (5.1) folgt aus Aufgabe 4.8. Für die erste Gleichung kann man entweder Aufgabe 4.8 benutzen oder wie folgendes argumentieren. Man berechne nach Satz 4.9.(iii)

$$E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}\Big(\dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2}\Big) + \tilde{U}(r) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \tilde{U}_c(r) = \tilde{E}_c(r, \dot{r}).$$

Da E ein erstes Integral ist, liefert das Ableiten nach t der obigen Gleichung

$$0 = \dot{r}\Big(\ddot{r} + \frac{\mathrm{d}\tilde{U}_c}{\mathrm{d}r}\Big).$$

Wenn $\ddot{r}(t_0) + \frac{\mathrm{d}\tilde{U}_c}{\mathrm{d}r}(r(t_0)) \neq 0$ für irgendwelche $t_0 \in I$ gelten würde, gäbe es ein offenes Intervall $J \subset I$ mit $t_0 \in J$ und $\dot{r}(t) \equiv 0$, für alle $t \in J$. Insbesondere, $\frac{\mathrm{d}\tilde{U}_c}{\mathrm{d}r}(r(t)) \neq 0$, denn $\ddot{r}(t) = 0$. Außerdem, $r(t) \equiv r_0$ und wir können zweimal die Identität $\langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t)\rangle = r_0^2$ nach t ableiten und bekommen

$$0 = \langle \ddot{r}, \mathbf{r}\rangle + \langle \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}\rangle.$$

Wir setzen die Gleichung $\ddot{\mathbf{r}} = -\tilde{f}(r)\hat{\mathbf{r}}$ und die Formel in Satz 4.9.(iii) ein und finden den Widerspruch

$$0 = \tilde{f}(r(t)) - \frac{c^2}{r(t)^3} = \frac{\mathrm{d}\tilde{U}_c}{\mathrm{d}r}(r(t)). \qquad \square$$

Aufgabe 5.6. *Es sei* $\mathbf{F}$ *eine konservative Zentralkraft und* $r_0 \in \mathbb{R}^+$. *Es existiert eine Lösung* $\mathbf{r}$ *von* $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, *die sich in einem Kreis um* $\mathbf{0}$ *mit Radius* r_0 *bewegt, genau dann, wenn* $\tilde{f}(r_0) < 0$. *In diesem Fall ist die Winkelgeschwindigkeit konstant und die Periode lautet*

$$T(r_0) = 2\pi\sqrt{\frac{r_0}{\tilde{f}(r_0)}}.$$

Satz*. *Es sei* $\mathbf{F}$ *eine konservative Zentralkraft und* $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3_\times$ *eine Lösung von* $\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *in der Ebene* $\{z = 0\}$ *mit* $\mathbf{c} = (0, 0, c)$ *und* $c \neq 0$. *Wenn* $t : J \to I$ *die Inversefunktion von* $\theta : I \to \mathbb{R}$ *ist, definieren wir*

$$s : J \to \mathbb{R}^+, \qquad s(\theta) = \frac{1}{r(t(\theta))}, \qquad \forall\, \theta \in J.$$

Wenn $\tilde{\tilde{U}}_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *gegeben durch* $\tilde{\tilde{U}}_c(s) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{c^2}\tilde{U}(1/s)$ *ist, haben wir*

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\theta^2} = -\frac{\mathrm{d}\tilde{\tilde{U}}_c(s)}{\mathrm{d}s}.$$

Insbesondere bewegt sich s *unter einer konservativen Kraft mit entsprechender Energie*

$$\tilde{\tilde{E}}_c : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{\tilde{E}}_c(s, v_s) = \frac{v_s^2}{2} + \tilde{\tilde{U}}_c(s).$$

Es gilt $\tilde{\tilde{E}}_c(s, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}) = \frac{1}{c^2}\tilde{E}_c(r, \dot{r})$.

Eine Lösung $r : I \to \mathbb{R}^+$ der ersten Gleichung in (5.1) stellt die Bewegung einer Punktmasse in $\mathbb{R}^+$ unter einer konservativen Kraft dar. Wenn eine solche Lösung gegeben ist, gewinnen wir die einzige Lösung $\theta_{\theta_0} : I \to \mathbb{R}$ der zweiten Gleichung mit Anfang θ_0 zur Zeit $t_0 \in I$ durch Integrierung

$$\theta_{\theta_0}(t) = \theta_0 + c\int_{t_0}^{t} \frac{1}{r^2(\tau)}\mathrm{d}\tau, \qquad \forall\, t \in I.$$

Daher studieren wir jetzt genauer konservative Kräfte auf $\mathbb{R}^+$.

5.3 Konservative Kräfte auf $\mathbb{R}^+$: maximale Lösungen

Es sei nun $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und betrachten wir die Gleichung

$$\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r).$$

In diesem Fall sind die Niveaumengen $E^{-1}(h)$ in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ enthalten und man kann ein qualitatives Verständnis der Geometrie der Bahnen vom Skizzieren dieser Mengen schon gewinnen, denn sie invariant sind.

Aufgabe*. *Skizzieren Sie die Mengen $E^{-1}(h)$ für die Potentiale*

$$U_1(r) = \frac{1}{2}r^2 + 11r - 6\log r + \frac{6}{r}, \qquad U_2(r) = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r}, \quad U_3(r) = -r - \frac{1}{r}$$

Hiweis: zeichnen Sie den Graph des Potentiales, indem Sie seine Ableitung berechnen.

Was die Dynamik angeht stellen wir hier unten zwei Resultate vor. Das erste gibt uns eine Bedingung, für die alle die maximalen Lösungen für alle reellen Zeiten definiert sind.

Satz 5.7. *Es sei angenommen, dass*

$$(i) \quad \limsup_{r \to 0} U(r) = +\infty$$

und man nehme $(r_1, v_1) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Die Bahn $r_{(r_1,v_1)}$ ist nach unten von einer positiven Zahl beschränkt. Wenn zusätzlich

$$(ii) \quad \liminf_{r \to +\infty} \frac{U(r)}{r^2} > -\infty.$$

gilt, haben wir $I_{(r_1,v_1)} = \mathbb{R}$. Wenn statt (ii), die Bedingung

$$(iii) \quad \limsup_{r \to +\infty} U(r) = +\infty$$

zusammen mit (i) gilt, ist $r_{(r_1,v_1)}$ nach oben von einer positiven Zahl beschränkt und daher folgt $I_{(r_1,v_1)} = \mathbb{R}$ auch in diesem Fall.

Beweis. Es sei zuerst nur die Bedingung (i) angenommen. Dann gilt

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} = \bigcup_{h \in \mathbb{R},\ r_0 \notin U^{\leq h}} \big([r_0, +\infty) \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h).$$

Das ist klar, denn für jedes $(r_1, v_1) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ mit $h := E(r_1, v_1)$ gibt es ein $r_0 \in (0, r_1)$ mit $U(r_0) > h$, also $r_0 \notin U^{\leq h}$. Außerdem ist jede Menge $\big([r_0, +\infty) \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h)$ invariant. Um solche Aussage zu beweisen, nehmen wir $(r_1, v_1) \in \big([r_0, +\infty) \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h)$ und es sei $U_*^{\leq h}$ die zusammenhängende Komponente von $U^{\leq h}$, die r_1 enthält. Wir haben $U_*^{\leq h} \subset [r_0, +\infty)$, denn $r_0 \notin U^{\leq h}$. Die Aussage folgt dann aus Satz 4.4. Es sei nun die Bedingung (ii) zusätzlich angenommen. Um die gewünschte Behauptung zu beweisen, bleibt es wegen des Satzes 3.12 nur zu zeigen, dass es für alle $(r_0, h) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ein $\delta_{r_0,h} > 0$ gibt mit

$$I_{(r_1,v_1)} \supset (-\delta_{(r_0,h)}, \delta_{(r_0,h)}) \qquad \forall\, (r_1, v_1) \in \big([r_0, +\infty) \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h).$$

Nach (ii) gibt es $C_{(r_0,h)} > 0$ mit

$$\frac{U(r) - h}{r^2} > -C_{(r_0,h)}, \qquad \forall r \in [+\infty).$$

Es sei nun $(r_1, v_1) \in (r_1, v_1) \in \big([r_0, +\infty) \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h)$. Wir haben, dass

$$\bar{B}_{r_1 - r_0/2}(r_1) \subset [r_0/2, 2r_1]$$

und aus der obigen Ungleichung folgt

$$h - U(r) \leq 4C_{(r_0,h)} r_1^2, \qquad \forall\, r \in \bar{B}_{r_1 - r_0/2}(r_1).$$

Nach Satz (4.6) wissen wir, dass $I_{(r_1,v_1)} \supset [-\delta, \delta]$, wobei

$$\delta := \frac{r_1 - r_0/2}{\sqrt{2}\sqrt{h - \min\limits_{\bar{B}_{r_1 - r_0/2}(r_1)} U}} \geq \frac{r_1 - r_1/2}{\sqrt{2}\sqrt{4C_{(r_0,h)} r_1^2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}C_{(r_0,h)}}.$$

Also die Behauptung ist bewiesen mit $\delta_{(r_0,h)} := (4\sqrt{2}C_{(r_0,h)})^{-1}$.

Es sei nun die Bedingung (iii) statt (ii) angenommen. Wie im ersten Teil des Beweises folgt es, dass

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} = \bigcup_{h \in \mathbb{R},\ r_2 \notin U^{\leq h}} \big((0, r_2] \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h)$$

und jede Menge in der Vereinigung ist invariant. Das impliziert, dass alle die Bahnen $r_{(r_1,v_1)}$ auch beschränkt von oben sind. Die Gleichung $I_{(r_1,v_1)}$ ist nun eine Folgerung von Satz 4.5. $\square$

Folgerung 5.8. *Es sei* $\mathbf{F}$ *eine konservative Zentralkraft mit Potential* $\tilde{U} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. *Es sei angenommen, dass*

$$(i)' \quad \limsup_{r \to 0} r^2 \tilde{U}(r) \geq 0$$

und man nehme $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) \in \mathbb{R}^3_\times \times \mathbb{R}^3$ *mit* $\mathbf{c} \neq 0$ *und zugehörender maximaler Lösung* $\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1)}$. *Dann ist* $|\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1)}|$ *nach unten von einer positiven Zahl beschränkt. Wenn zusätzlich*

$$(ii)' \quad \liminf_{r \to +\infty} \frac{\tilde{U}(r)}{r^2} > -\infty.$$

gilt, haben wir $I_{(\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1)} = \mathbb{R}$. *Wenn statt* $(ii)'$, *die Bedingung*

$$(iii)' \quad \limsup_{r \to +\infty} \tilde{U}(r) = +\infty$$

zusammen mit $(i)'$ *gilt, ist* $|\mathbf{r}_{(\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1)}|$ *nach oben von einer positiven Zahl beschränkt und daher folgt* $I_{(\mathbf{r}_1,\mathbf{v}_1)} = \mathbb{R}$ *auch in diesem Fall.*

Beweis. Die Behauptungen folgen aus Satz 5.7, wenn wir zeigen, dass $(i)'$, $(ii)'$ und $(iii)'$ jeweils (i), (ii) und (iii) für das effektive Potential $\tilde{U}_c(r) = \frac{c^2}{2r^2} + \tilde{U}(r)$ implizieren. Die Bedingungen (ii) und (iii) sind klar, weil

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c^2}{2r^2} = 0.$$

Nach $(i)'$ existiert eine Folge $(r_i) \subset\in \mathbb{R}^+$ mit $r_i \to 0$ und $r_i^2\tilde{U}(r_i) \geq -\frac{1}{4}c^2$. Das impliziert

$$\lim_{i\to+\infty} \tilde{U}_c(r_i) = \lim_{i\to+\infty} \frac{c^2 + 2r_i^2\tilde{U}(r_i)}{2r_i^2} \geq \lim_{i\to+\infty} \frac{c^2 - c^2/2}{2r_i^2} = +\infty,$$

so dass $\limsup_{r\to 0} \tilde{U}_c(r) = +\infty$. □

Aufgabe 5.9. *Es sei* $\alpha \in \mathbb{R}$ *und* $\tilde{U}_\alpha, \tilde{U}_\alpha^- : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *die Funktionen* $\tilde{U}_\alpha^+(r) = r^\alpha$ *und* $\tilde{U}_\alpha^-(r) = -r^\alpha$. *Bestimmen Sie hinreichende Bedingungen für* α, *so dass alle die maximalen Lösungen der entsprechenden Gleichung* $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_\alpha^+(\mathbf{r})$ *(bzw.* $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_\alpha^-(\mathbf{r})$*) für alle Zeiten definiert sind. Sind die von Ihnen bestimmten Bedingungen auch notwendig?*