20 Satz von Osipov-Belbruno für $h = 1/2$ (Teil II) 2.7.

Um die erste Aussage im Satz 19.1 zu beweisen, führen wir die folgende Klasse von Kreise auf S^{n-1} ein.

Definition 20.1. Ein Kreis $\mathcal{C} \subset S^{n-1}$ heißt vertikal, wenn $\mathcal{C} = \beta \cap S^{n-1}$, wobei β eine 2-Ebene ist, die eine Gerade mit Richtungsvektor $\mathbf{N}$ enthält. Ein vertikaler Halbkreis ist der Teil eines vertikalen Kreises, der in S^{n-1}_+ enthalten ist.

Aufgabe 20.2. *Beweisen Sie: die Ebene β eines vertikalen Kreises lässt sich als*

$$\beta = (\mathbf{w}, 1) + \mathbb{R} \cdot (\mathbf{e}_1, 0) + \mathbb{R} \cdot \mathbf{N}, \qquad \mathbf{w}, \mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad w < 1, \quad \mathbf{e}_1 \in S^{n-2}, \quad \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$$

schreiben. Außerdem, die Vektoren $\mathbf{w}$ und, bis auf Vorzeichen, $\mathbf{e}_1$ mit den obigen Eigenschaften werden von β eindeutig bestimmt.

Hilfsatz 20.3. *Die Abbildung $P \circ G \circ F_1 : \mathbb{H}^3 \to S^3_+$ gibt eine Bijektion zwischen der Menge der Großhyperbeln und der Menge der vertikalen Halbkreise.*

Beweis. Nach dem Hilfsatz 19.8 können wir die tragende Ebene einer Großhyperbel γ als

$$\alpha = \mathbb{R} \cdot (\mathbf{e}_1) + \mathbb{R} \cdot \mathbf{x}$$

schreiben, wobei $\mathbf{e}_1 \in S^{n-2}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^{n-1}$ und $\langle \mathbf{y}, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$. Wir haben $F_1(\gamma) = F_1(\alpha) \cap \mathbb{H}^{n-1}$, wobei $F_1(\alpha) = \mathbb{R} \cdot (\mathbf{e}_1, 0) + \mathbb{R} \cdot F_1(\mathbf{x})$. Diese Ebene schneidet $\{z = 1\}$ in der Gerade

$$g = (\mathbf{w} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_1, 1) + \mathbf{N}, \qquad (\mathbf{w}, 1) = G \circ F_1(\mathbf{x}).$$

Das bedeutet, dass wir die Menge $P \circ G \circ F_1(\gamma)$ erhalten, indem wir die Hemisphäre S^{n-1}_+ mit der Ebene

$$\beta := (\mathbf{w}, 0) + \mathbb{R} \cdot (\mathbf{e}_1, 0) + \mathbb{R} \cdot \mathbf{N}$$

schneiden. Die Korrespondenz $\alpha \mapsto \beta$ ist eine Bijektion, denn die Paaren $(\mathbf{e}_1, \mathbf{x})$ und $(\mathbf{e}_1, \mathbf{w})$ bestimmen α bzw. β eindeutig und $(\mathbf{e}_1, \mathbf{x}) \mapsto (\mathbf{e}_1, \mathbf{w})$ ist eine Bijektion nach Aufgabe 19.9. □

Definition 20.4. Wir definieren $F_2 : S^{n-1} \to S^{n-1}$ als die Spiegelung an der Hyperebene $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid z = 0\}$.

Aufgabe 20.5. *Schreiben Sie eine Formel für F_2 und beweisen Sie, dass $F_2 = F_1 \circ A_*$.*

Hilfsatz 20.6. *Die vertikalen Kreise sind diejenige Kreise auf S^{n-1}, die nicht in $\{z = 0\}$ enthalten sind und invariant durch die Abbildung F_2 sind.*

Beweis. Es sei angenommen, dass $\mathcal{C}$ ein Kreis auf S^{n-1} mit tragender Ebene β ist, der nicht in $\{z = 0\}$ enthalten ist. Wenn $(\mathbf{y}, z) \in \beta$ mit $z \neq 0$ und $F_2(\mathbf{y}, z) = (\mathbf{y}, -z) \in \beta$, dann liegt die Gerade $(\mathbf{y}, z) + \mathbb{R}(0, 2z)$ in β. Diese Gerade hat $\mathbf{N}$ als Richtungsvektor. Es sei umgekehrt angenommen, dass β vertikal ist. Mit Hilfe der Darstellung in Aufgabe 20.2 sieht man direkt, dass β und daher $\mathcal{C}$ invariant durch F_2 sind. □

Hilfsatz 20.7. *Wir haben das kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{F_2} & S^{n-1} \\ {\scriptstyle\Psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Psi} \\ \bar{\mathbb{R}}^{n-1} & \xrightarrow{I_*^+} & \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \end{array}, \tag{20.1}$$

wobei $I_*^+ : \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ *die Inversion an der Einheitssphäre* $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *darstellt.*

Beweis. Wir beweisen zuerst, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{F_1} & S^{n-1} \\ {\scriptstyle\Psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Psi} \\ \bar{\mathbb{R}}^{n-1} & \xrightarrow{A_*} & \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \end{array}, \tag{20.2}$$

wobei $A_* : \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ die antipodale Abbildung mit Zentrum $\mathbf{0}$ ist. In der Tat,

$$\Psi(F_1(\mathbf{y}, z)) = \Psi(-\mathbf{y}, z) = \frac{1}{1-z}(-\mathbf{y}) = -\frac{1}{1-z}\mathbf{y} = A_*\Big(\frac{1}{1-z}\mathbf{y}\Big) = A_*(\Psi(\mathbf{y}, z)).$$

Die Kommutativität des Diagramms in (20.1) folgt, wenn wir die Diagramme (17.1) und (20.2) nebeneinander setzen und benutzen, dass $F_1 \circ A_* = F_2$ und $A_* \circ I_*^- = I_*^+$:

$$\Psi \circ F_2 = \Psi \circ F_1 \circ A_* = A_* \circ \Psi \circ A_* = A_* \circ I_*^- \circ \Psi = I_*^+ \circ \Psi. \qquad \square$$

Folgerung 20.8. *Die stereographische Projektion* $\Psi : S_+^3 \to \bar{\mathbb{R}}_1^3$ *gibt eine Bijektion zwischen der Menge der vertikalen Halbkreise und der Menge der Hodographe mit Energie* $h = 1/2$.

Beweis. Wir erinnern uns an den Satz 17.2, der besagt, dass die Hodographe $\mathbf{v}$ mit Energie $h = 1/2$ die Bogen $\mathcal{B}_\mathcal{C}$ parametrisieren, wobei $\mathcal{C}$ invariant durch I_*^+ aber nicht in S^2 enthalten ist. Die Behauptung folgt dann aus der Zusammenarbeit von Hilfsatz 20.6 und 20.7. □

Beweis der ersten Aussage im Satz 19.1. Die gewünschte Bijektion ist als Verkettung der Bijektion im Hilfsatz 20.3 und der in der folgerung 20.8 gegeben. □