Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2017/18

Dr. Gabriele Benedetti   Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher

Aufgaben Serie 9, 11.12.2017

9-1 Man ordne dem Krümmungstensor R einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) den folgenden Tensor S zu:

$$S(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) + g(R(X, Z)Y, W).$$

Beweisen Sie aus den Symmetrien von R, dass S symmetrisch in X und W ist, d.h.

$$S(X, Y, Z, W) = S(W, Y, Z, X).$$

9-2 Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und (x^i) Normalkoordinaten um $p \in M$ mit $x^i(p) = 0$. Wir definieren für alle Indizes i, j, k, l

$$\Gamma_{ijk}(x) = \sum_{m=1}^{n} g_{km}(x)\Gamma_{ij}^{m}(x).$$

Zeigen Sie mittels der geodätischen Gleichung, dass für alle Indizes i, j, k, l

$$\text{(i)}\ \ \Gamma_{ij}^{k}(0) = 0, \qquad \text{(ii)}\ \ \Gamma_{ij,l}^{k}(0) + \Gamma_{li,j}^{k}(0) + \Gamma_{jl,i}^{k}(0) = 0,$$

wobei $\Gamma_{ij,l}^{k}(x) = \partial_{x^l}\Gamma_{ij}^{k}(x)$. Dann sind (i) und (ii) äquivalent zu

$$\text{(i)}'\ \ \Gamma_{ijk}(0) = 0, \qquad \text{(ii)}'\ \ \Gamma_{ijk,l}(0) + \Gamma_{lik,j}(0) + \Gamma_{jlk,i}(0) = 0.$$

Nach der Definition der Christoffelsymbole haben wir:

$$2\Gamma_{ijk} = g_{ki,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}.$$

Benutzen Sie diese Formel um zu zeigen, dass

$$\text{(iii)}\ \ g_{ij,k} = \Gamma_{jki}(x) + \Gamma_{kij}(x).$$

Folgern Sie daraus, dass für alle Indizes i, j, k

$$g_{ij,k}(0) = 0 \tag{$\star$}$$

gilt.

9-3 Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und (x^i) Normalkoordinaten um $p \in M$ mit $x^i(p) = 0$. Wir definieren für alle Indizes i, j, k, l

$$R_{ijkl}(x) = g\Big(R\big(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\big)\tfrac{\partial}{\partial x^k}, \tfrac{\partial}{\partial x^l}\Big).$$

Zeigen Sie aus (i) und der Definition des Krümmungstensors, dass

$$\text{(iv)}\ \ R_{ijkl}(0) = \Gamma_{jkl,i}(0) - \Gamma_{ikl,j}(0).$$

Folgern Sie aus (ii)' und (iv), dass

$$\text{(v)}\quad R_{ijkl}(0) + R_{ikjl}(0) = 3\Gamma_{jkl,i}(0).$$

Kombinieren Sie (v) mit Aufgabe 1 um zu zeigen, dass $\Gamma_{ijk,l}(0) = \Gamma_{ijl,k}(0)$. Die Formel (ii)' liefert dann

$$\text{(vi)}\quad \Gamma_{ijk,l}(0) + \Gamma_{jki,j}(0) + \Gamma_{kij,l}(0) = 0.$$

Leiten Sie (iii) nach $\frac{\partial}{\partial x^l}$ ab, um die Formel

$$\text{(vii)}\quad \Gamma_{ijk,l}(0) = g_{ij,kl}(0)$$

mittels (vi) zu gewinnen. Schließlich, beweisen Sie mittels (v) die Formel

$$g_{ij,kl}(0) = -\frac{1}{3}\Big(R_{lijk}(0) + R_{ljik}(0)\Big). \qquad (\star\star)$$

9-4 Es seien wie oben (x^i) Normalkoordinaten um p mit $x^i(p) = 0$. Wir haben die Taylor-Entwicklung von g im 0 in der Variabel x:

$$g_x(v,v) = \sum_{i,j} g_{ij}(0)v^i v^j + \sum_{i,j,k} g_{ij,k}(0)x^k v^i v^j + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} g_{ij,kl}(0)x^k x^l v^i v^j + \ldots$$

Zeigen Sie aus $(\star)$ and $(\star\star)$, dass

$$g_x(v,v) = \sum_i (v^i)^2 - \frac{1}{3}\sum_{i,j,k,l} R_{lijk}(0)x^k x^l v^i v^j + \ldots$$

Folgern Sie aus der Antisymmetrie des Krümmungstensors, dass

$$g_x(v,v) = \sum_i (v^i)^2 - \frac{1}{3}\sum_{l<i,k<j} R_{lijk}(0)(x^k v^j - x^j v^k)(x^l v^i - x^i v^l) + \ldots$$

9-5 Wenn M Dimension 2 hat, dann $R_{1221}(0) = K(0)$, wobei K die Gauß-Krümmung ist. Wenn (x,y) die Normalkoordinaten kennzeichnen, gewinne man aus der obigen Formel die Entwicklung

$$g_{(x,y)}(v,v) = v_x^2 + v_y^2 - \frac{K(0)}{3}(yv_x - xv_y)^2 + \ldots.$$

Es sei $\sqrt{g} := \sqrt{\det g} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$. Beweisen Sie die Entwicklung

$$\sqrt{g}(x,y) = 1 - \frac{K(0)}{6}(x^2 + y^2) + \ldots$$

Es sei $B(r) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ der geodätische Ball um $p \in M$ in Normalkoordinaten. Der Flächeinhalt von $B(r)$ ist definiert als

$$A(r) := \int_{B(r)} \sqrt{g}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Beweisen Sie, dass die Gauß-Krümmung sich als der Limes

$$K(0) = \lim_{r\to 0} 12\frac{\pi r^2 - A(r)}{\pi r^4}.$$

schreiben lässt. *Hinweis: Benutzen Sie die Integration in Polarkoordinaten*

$$\int_{B(r)} \varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^r s\Big(\int_0^{2\pi} \varphi(s\cos\theta, s\sin\theta)\mathrm{d}\theta\Big)\mathrm{d}s, \quad \forall\, \varphi : B(r) \to \mathbb{R}.$$