Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2017/18

Dr. Gabriele Benedetti Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher

Aufgaben Serie 8, 7.12.2017

8-1 Es sei $S^{n-1} := \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| = 1\}$ die Einheitssphäre und $g_{S^{n-1}}$ die Riemannsche Metrik auf S^{n-1}, die von der Euklidischen Metrik $g_{\mathbb{R}^n}$ des $\mathbb{R}^n$ induziert wird. Für jeden Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ definieren wir Polarkoordinaten um P durch den Diffeomorphismus

$$\Phi_P : (0, +\infty) \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{P\}, \qquad \Phi_P(r, \xi) = r \cdot \xi + P.$$

Finden Sie eine Inverse für Φ_P und zeigen Sie, dass

$$\Phi_P^* g_{\mathbb{R}^n} = \mathrm{d}r^2 + r^2 g_{S^{n-1}}.$$

Hinweis: $T_\xi S^{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid g_{\mathbb{R}^n}(X, \xi) = 0\}$.

8-2 Für jeden $P \in \mathbb{R}^n$ sei die Inversion $I_P : \mathbb{R}^n \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{P\}$ um die Einheitssphäre mit Mittelpunkt P auf folgender Weise definiert: $I_P(z)$ ist der einzige Punkt auf der Halbgerade $(0, +\infty) \cdot (z - P)$ mit der Eigenschaft

$$|I_P(z) - P| \cdot |z - P| = 1.$$

Prüfen Sie die folgenden Formeln für I_P bezüglich der euklidischen Koordinaten und bezüglich der Polarkoordinaten um P:

$$I_P(z) = \frac{z - P}{|z - P|} + P, \qquad I_P(r, \xi) = (r^{-1}, \xi).$$

Benutzen Sie die letzte Formel um zu Beweisen

$$I_P^* g_{\mathbb{R}^n} = |z - P|^{-4} g_{\mathbb{R}^n}.$$

8-3 Es sei $I_P : \mathbb{R}^n \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{P\}$ die oben eigeführte Inversion. Beweise Sie:

(a) Wenn L eine Gerade durch P ist, dann gilt $I_P(L \setminus \{P\}) = L \setminus \{P\}$;

(b) Wenn C ein Kreis mit $P \in C$ ist, dann ist $L := I_P(C \setminus \{P\})$ eine Gerade mit $P \notin L$;

(c) Wenn C ein Kreis mit $P \notin C$ ist, dann ist $C' := I_P(C)$ auch ein Kreis mit $P \notin C'$.

Hinweis: Sie können $P = O$ und $n = 3$ annehmen (Warum?).

8-4 Gekennzeichnen Sie einen Punkt des $\mathbb{R}^n$ als $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ und setzen $e_n := (0, 1)$, $B^n := \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| < 1\}$. Definieren Sie die Abbildung $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ als die Verkettung

$$f(z) = I_{-e_n}\big(\tfrac{1}{2}(z - 1)\big).$$

(a) Zeigen Sie, dass $f(B^n) = H^n$, wobei $H^n = \{z \in \mathbb{R}^n \mid y > 0\}$, gilt und dass f ein Diffeomorphismus mit seinem Bild ist.

(b) Geben Sie eine Formel für $f^{-1} : H^n \to B^n$ an und beweisen, dass

$$(f^{-1})^*\Big(\frac{4g_{\mathbb{R}^n}}{(1-|z|^2)^2}\Big) = \frac{g_{\mathbb{R}^n}}{y^2}.$$

8-5 Es sei $g_{H^n} := \frac{1}{y^2} g_{\mathbb{R}^n}$ die Riemannsche metrik auf H^n, die in der obigen Aufgabe aufgetaucht ist. Zeigen Sie, dass die untenstehenden Diffeomorphismen $f_{a_0,x_0}, \sigma, I_0 : H^n \to H^n$ (wobei $a_0 > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$) Isometrien von (H^n, g_{H^n}) sind:

$$f_{a_0,x_0}(z) = a_0 z + (x_0, 0), \qquad \sigma(z) = (-x, y), \qquad I_0(z) = \frac{z}{|z|^2}.$$

8-6 Es sei $f : \mathbb{R}^n \to H^n$ der Diffeomorphismus

$$f(z) = (x, e^w), \qquad \forall\, z = (x, w) \in \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie, dass

$$f^* g_{H^n} = \mathrm{d}w^2 + e^{-2w} g_{\mathbb{R}^{n-1}}$$

gilt. Insbesondere ist $f^* g_{H^n}$ eine verzerrte Metrik. Schlußfolgern Sie daraus, dass für alle $a, b > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die parametrisierte Halbgerade

$$t \mapsto (x_0, ae^{bt})$$

eine geodetische Linie ist.

8-7 Es sei L die Halbgerade $L := \{x = 0, y > 0\}$ und für jede $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $x_0 \neq x_1$ sei $C_{x_0,x_1} \subset \mathbb{R}^n$ ein Halbkreis, der durch $(x_0, 0)$ und $(x_1, 0)$ läuft und steht dort zur Hyperebene $\{y = 0\}$ senkrecht. Finden Sie eine Isometrie $f : H^n \to H^n$ von g_{H^n} mit $f(L) = C_{x_0,x_1}$. *Hinweis: Suchen Sie nach einer f der Art*

$$f(z) = I_{(x_2,0)}(z) + (x_3, 0),$$

wobei $x_2, x_3 \in \mathbb{R}^{n-1}$ durch die folgenden Bedingungen zu bestimmen sind:

$$f\big((0,0)\big) = (x_1, 0), \qquad \lim_{y\to+\infty} f\big((0,y)\big) = (x_2, 0).$$

Schlußfolgern Sie daraus, dass eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : (a, b) \to H^n$ eine geodätische Linie für g_{H^n} darstellt, genau dann wenn die Spur von c in irgendwelchem Halbkreis C_{x_0,x_1} enthalten ist.

8-8 Zwei Riemannsche Metriken g_1, g_2 auf M heißen konform, wenn sie die gleichen Winkel bestimmen, d.h. für alle $x \in M$ gilt

$$\frac{g_1(u,v)}{|u|_1 \cdot |v|_1} = \frac{g_2(u,v)}{|u|_2 |v|_2}, \qquad \forall\, u, v \in T_x M, \quad u, v \neq 0.$$

Schlußfolgern Sie daraus, dass $g_1(u,v) = 0$ genau dann wenn $g_2(u,v) = 0$. Zeigen Sie, dass g_1, g_2 konform sind, genau dann wenn es eine positive Funktion $\lambda : M \to (0, +\infty)$ gibt, für die $g_2 = \lambda g_1$.

Hinweis: Um die Existenz von λ zu zeigen, nehmen Sie $u, v \in T_x M$ mit $|u|_1 = |v|_1 = 1$ und $g_1(u,v) = 0$ und beweisen Sie, dass $\mu := |v|_2/|u|_2 = 1$ durch das Berechnen des Winkels zwischen $u + v$ und $u - v$.