Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2017/18

Dr. Gabriele Benedetti   Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher

Aufgaben Serie 7, 27.11.2017

7-1 Es sei $M = (a, b) \times \mathbb{R}$ eine offene Streife in der Ebene mit Koordinaten (t, v). Ferner sei $r : (a, b) \to (0, \infty)$ eine glatte funktion und ϵ eine Zahl in $\{-1, 1\}$. Betrachten Sie die verzerrte Pseudo-Riemannsche Metrik g deren Bogenelement lautet

$$\mathrm{d}s^2 = \epsilon\, \mathrm{d}t^2 + r^2(t)\mathrm{d}v^2.$$

Bestimmen Sie die Christoffelsymbole des mit g verträglichen Zusammenhangs in Bezug auf die Koordinaten (t, v).

7-2 Benutzen Sie die obige Aufgabe um die Christoffelsymbole der folgenden Metriken zu berechnen:

(a) der Euklidischen und Minkowski Ebene in Bezug auf die Polarkoordinaten (r, ϕ) (Aufgaben 6-1 und 6-2).

(b) der Rotationsfläche, die durch die nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $t \mapsto c(t) = (r(t), 0, z(t))$ gegeben ist. Leiten Sie daraus die Christoffelsymbole des Rotationstorus her:

$$f(t, v) = ((a + b\cos t)\cos v, (a + b\cos t)\sin v, b\sin t)\,, \qquad 0 < b < a.$$

7-3 Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R}$ das Geschwindigkeitsfeld $c'(t)$ der Schraubenlinie $c(t) = (\cos t, \sin t, at)$ auf dem Zylinder

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

parallel ist (d.h. die Schraubenlinien sind *geodätische Linien*).

7-4 [1] Die Schwarzschild-Halbebene ist definiert als Halbebene

$$E = \{(t, r) \in \mathbb{R}^2 \mid r > r_0\}$$

mit der Pseudo-Riemannschen Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = -h\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{h}\mathrm{d}r^2, \qquad h(r, t) := 1 - \frac{r_0}{r}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $b \in \mathbb{R}$ die Abbildungen $(t, r) \mapsto (\pm t + b, r)$ Isometrien sind. Ferner berechnen Sie die Christoffelsymbole und zeigen, dass die r-Linien stets geodätische Linien sind. Zeigen Sie ferner, dass für eine geodätische Linie $\gamma(s) = (t(s), r(s))$ der Ausdruck $h(\gamma(s))t'(s)$ stets konstant ist. Die Konstante r_0 entspricht dabei dem Schwarzschildradius, der von der Masse eines schwarzen Loches abhängt, das man sich im Zentrum $r = 0$ vorstellen soll.

[1] Aufgabe 5-21, W. Kühnel, Differentialgeometrie