Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2017/18

Dr. Gabriele Benedetti   Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher

Aufgaben Serie 6, 20.11.2017

6-1 Auf $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ mit den kartesischen Koordinaten (x, y) werden durch

$$(r, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi) \mapsto f(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi) \in \mathbb{R}^2$$

Polarkoordinaten (r, ϕ) eingeführt. Geben Sie die Darstellung der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten an.

6-2 Gegeben ist der Minkowskiraum $\mathbb{R}^2_1$ mit dem inneren Produkt

$$\langle x, y \rangle_1 = -x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

In der Teilmenge $U := \left\{ x \in \mathbb{R}^2_1 \mid \|x\|_1^2 < 0 \right\}$ können wir Polarkoordinaten $(r, \phi) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ durch die Parametrisierung

$$f(r, \phi) = (r \cosh \phi, r \sinh \phi)$$

einführen. Bestimmen Sie die Gestalt der Minkowskimetrik in diesen Koordinaten und skizzieren Sie die Koordinatenlinien.

6-3 Gegeben sind positive reelle Zahlen a, b mit $0 < a < b$.

(a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung der Rotationsfläche in $\mathbb{R}^3$, die durch Rotation eines Kreises in der (x, z)-Ebene mit Radius a und Mittelpunkt $(b, 0, 0)$ um die z-Achse entsteht.

(b) Bestimmen Sie die induzierte Metrik in diesen Koordinaten.

6-4 Es sei $\gamma : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte, einfach geschlossene Frenetsche Kurve mit begleitendem 3-Bein e_1, e_2, e_3.

(a) Wenn $B^2_R \subset \mathbb{R}^2$ der offene Ball mit Radius R ist, definieren wir

$$f : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times B^2_R \to \mathbb{R}^3, \qquad f(t, x, y) = \gamma(t) + x e_2(t) + y e_3(t).$$

Zeigen Sie, dass für R klein genug, f ein Diffeomorphismus ist.

(b) Weiter sei

$$\widetilde{f} : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \qquad \widetilde{f}(t, r, \phi) = f(t, r \cos \phi, r \sin \phi)$$

die Verkettung von f mit der Polarkoordinaten von (x, y). Schreiben Sie die Euklidische Metrik in den Koordinaten (t, r, ϕ) mithilfe des 3-Bein sowie der Krümmung und Torsion von γ.

(c) Für $r_* > 0$ sei $\widetilde{f}(\mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times \{r_*\} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ das Rohr mit Radius r_* um γ. Geben Sie die Metrik in Koordinaten auf dem Rohr an.

6-5 Bestimmen Sie die Darstellung der Riemannschen Metrik auf der Standardsphäre S^n mittels der stereographische Projektion.

6-6 Gegeben ist der Minkowskiraum $\mathbb{R}^3_1$ mit dem inneren Produkt

$$\langle x, y\rangle_1 = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Sei $H := \{x \in \mathbb{R}^3_1 \mid \langle x, x\rangle_1 = -1,\ x_1 > 0\}$ das Hyperboloid. Zeigen Sie, dass H eine glatte Mannigfaltigkeit ist mit

$$T_xH = \big\{Y \in \mathbb{R}^3_1 \mid \langle x, Y\rangle_1 = 0\big\}.$$

Für alle $x \in H$ sei $g_x : T_xH \times T_xH \to \mathbb{R}$ die Einschränkung

$$g_x(Y_1, Y_2) = \langle Y_1, Y_2\rangle_1, \qquad \forall Y_1, Y_2 \in T_xH.$$

Zeigen Sie, dass g eine Riemannsche Metrik auf H liefert.

6-7 Es sei $P = (-1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3_1$ und definiere man für alle $x \in H$ den Schnittpunkt $(0, z(x)) \in \mathbb{R}^3_1$ zwischen der Gerade durch P und x und der Ebene $\{x_1 = 0\}$. Es sei $\pi : H \to \mathbb{R}^2$ die so entstandene Abbildung.

(a) Finden Sie das Bild von π und beweisen Sie, dass π ein Diffeomorphismus ist.

(b) Bestimmen Sie die von π induzierte Riemannsche Metrik auf dem Bild von π.

6-8 Für zwei kovariante Ableitungen $\nabla, \bar{\nabla}$ auf einer Mannigfaltigkeit definieren wir für Vektorfelder X, Y:

$$D(X, Y) = \nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y.$$

(a) Zeigen Sie, dass D ein Tensorfeld definiert, d.h. für alle $f \in C^\infty(M)$ und alle Vektorfelder X, Y gilt: $D(fX, Y) = D(X, fY) = fD(X, Y)$.

(b) Weiter sei angenommen, dass ∇ die Levi-Civita Ableitung bezüglich einer Riemannschen Metrik g ist. Zeigen Sie, dass die Torsion $\bar{\tau}$ von $\bar{\nabla}$ lautet

$$\bar{\tau}(X, Y) = D(X, Y) - D(Y, X).$$

(c) Beweisen Sie, dass $\bar{\nabla}$ kompatibel mit der Metrik g ist genau dann, wenn für alle X die Abbildung $Y \mapsto D(X, Y)$ antisymmetrisch bezüglich g ist. Nämlich,

$$g(D(X, Y), Z) = -g(D(X, Z), Y), \qquad \text{für alle Vektorfelder } X, Y, Z.$$

(d) Es sei nun g die Euklidische Metrik des $\mathbb{R}^3$ und $x \mapsto A_x \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3, 3)$ ein Matrizenfeld. Zeigen Sie, dass die kovariante Ableitung

$$\bar{\nabla}_X Y := \nabla_X Y + (A \cdot X) \times Y$$

kompatibel mit g ist, wobei $\times$ das Vektorprodukt ist. *(Alle die kovariante Ableitungen auf $\mathbb{R}^3$, die mit g kompatibel sind, entstehen von einem Matrizenfeld dieser Art).*