Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2017/18

Dr. Gabriele Benedetti Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher

Aufgaben Serie 5, 13.11.2017

5-1 Es seien M_1 und M_2 Mannigfaltigkeiten und betrachte man die Projektionen $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ für $i = 1, 2$. Fur alle $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ definiere man eine lineare Abbildung $\pi_p : T_p(M_1 \times M_2) \to T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$,

$$\pi_p(X) := (\mathrm{d}(\pi_1)_p(X), \mathrm{d}(\pi_2)_p(X)), \qquad \forall X \in T_p(M_1 \times M_2).$$

Man beweise, dass π_p ein Isomorphismus ist, indem man eine Umkehrabbildung für π_p bildet.

5-2 Es sei M eine Mannigfaltigkeit, die nicht unbedingt orienterbar ist. Zeigen Sie, dass ihr Tangentialbündel TM eine orientierbare Mannigfaltigkeit ist.

5-3 Sei J die Abbildung des $\mathbb{R}^4$, die in der Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 des $\mathbb{R}^4$ gegeben ist durch $J(e_1) = e_2, J(e_2) = -e_1, J(e_3) = e_4, J(e_4) = -e_3$, bzw. durch die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die Einschränkung des Vektorfeldes $x \in \mathbb{R}^4 \mapsto J(x) \in \mathbb{R}^4$ auf die 3-dimensionale Sphäre $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4; \|x\|^2 = 1\}$ tangential ist und ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf S^3 definiert.

(Diese Konstruktion läßt sich auf jede S^{2n-1} mit $n \geq 1$ über-tragen)

5-4 Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A : S^n \to S^n$ die Antipodenabbildung, d.h. $A(x) = -x$, für alle $x \in S^n$. Weiter sei $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ die Standardprojektion. Zeigen Sie, dass A ein Diffeomorphismus von S^n darstellt und dass, wenn V ein Vektorfeld auf S^n ist, dann die folgenden zwei Bedingungen äquivalent sind:

(a) Es gilt $\mathrm{d}A_x(V(x)) = V(A(x))$, $\forall x \in S^n$;

(b) Es gibt ein Vectorfeld W auf $\mathbb{R}P^n$ mit $\mathrm{d}p_x(V(x)) = W(p(x))$, $\forall x \in S^n$.

Folgern Sie daraus, dass $\mathbb{R}P^3$ ein nirgends verschwindendes Vektorfeld hat.

5-5 Es sei $f : M_1 \to M_2$ eine glatte Abbildung. Wir sagen, dass zwei Vektorfelder X_1 auf M_1 und X_2 auf M_2 f-verwandt sind, wenn

$$\mathrm{d}f_p(X_1) = X_2(f(p)), \qquad \forall p \in M_1.$$

Zeigen Sie, dass, wenn X_1 und X_2, beziehungsweise Y_1 und Y_2, f-verwandt sind, dann auch $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ f-verwandt sind.

5-6 Es sei M_1 eine Untermannigfaltigkeit von M_2 und X_1, Y_1 zwei Vektorfelder auf M_1. Es sei p ein Punkt auf M_1, U eine Umgebung von p in M_2 und X_2, Y_2 zwei Vektorfelder auf U, für die

$$X_2(q) = X_1(q), \qquad Y_2(q) = Y_1(q), \qquad \forall q \in U \cap M_1.$$

Schlußfolgern Sie, dass

$$[X_1, Y_1](p) = [X_2, Y_2](p).$$

5-7 Es seien $p \mapsto X(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $p \mapsto Y(p) = \sum_{i=1}^n Y_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$, zwei Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$, wobei die X_i und Y_i glatte reelle Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ sind. Zeigen Sie, dass

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n [X, Y]_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \text{wobei } [X, Y]_i := \sum_{j=1}^n \left(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right).$$

5-8 Für jedes $H \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$ definiere man das Vektorfeld X_H auf $M_{\mathbb{R}}(n, n)$ als

$$X_H(A) := A \cdot H \in T_A M_{\mathbb{R}}(n, n), \qquad \forall A \in M_{\mathbb{R}}(n, n),$$

wobei der Punkt $\cdot$ das Matrixprodukt gekennzeichnet und man die Identifizierung $T_A M_{\mathbb{R}}(n, n) = M_{\mathbb{R}}(n, n)$ benutzt hat. Zeigen Sie, dass für alle $H_1, H_2 \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$ gilt

$$[X_{H_1}, X_{H_2}] = X_{H_1 \odot H_2},$$

wobei die Matrix $H_1 \odot H_2 := H_1 \cdot H_2 - H_2 \cdot H_1$ der Kommutator zwischen H_1 und H_2 ist.

Aus der Vorlesung wissen wir, dass, wenn H antisymmetrisch ist, dann $X_H|_{SO(n)}$ sich auf ein Vektorfeld auf $SO(n)$ beschränkt. Auf ähnlicher Weise, wenn H spurlos ist, dann $X_H|_{SL(n)}$ sich auf ein Vektorfeld auf $SL(n)$ beschränkt (man siehe Aufgabe 4-5). Man bemerke, dass die Vektorräume der antisymmetrischen (bzw. spurlosen) Matrizen durch das Kommutatorprodukt $(H_1, H_2) \mapsto H_1 \odot H_2$ geschlossen sind.

Schließlich sei ASym(3) der Vektorraum von antisymmetrischen Matrizen in $M_{\mathbb{R}}(3, 3)$ und betrachte man die lineare Abbildung $C : \mathbb{R}^3 \to \text{ASym}(3)$ gegeben durch

$$C(v) = \begin{pmatrix} 0 & -x & -y \\ x & 0 & -z \\ y & z & 0 \end{pmatrix}, \qquad \forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass $C(u \times v) = C(u) \odot C(v)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$, wobei $\times$ das Vektorprodukt ist.