Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2017/18

Dr. Gabriele Benedetti   Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher

Aufgaben, Serie 4, 06.11.2017

4-1 Es seien $M_i \subset \mathbb{R}^{n_i+k_i}, i = 1, 2$ differenzierbare Untermannigfaltigkeiten der Dimension m_i und Kodimension k_i. Zeigen Sie, dass dann das Produkt $M_1 \times M_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in M_i, i = 1, 2\}$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Dimension $m_1 + m_2$ und der Kodimension $k_1 + k_2$ ist.

4-2 Man betrachte den Kegel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

als einen topologischen Raum, vorgesehen mit der vom $\mathbb{R}^3$ induzierten Topologie. Zeigen Sie, dass

(a) der topologische Raum K keine Mannigfaltigkeit ist *(Hinweis: Warum ist der Ursprung O ein spezieller Punkt von K?)*.

(b) die Unterräume $K_+ := K \cap \{z > 0\}$ und $K_- := K \cap \{z < 0\}$ Mannigfaltigkeiten der Dimension 2 sind, die diffeomorph zueinander sind.

4-3 (a) Zeigen sie, dass

$$M := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + z^4 = 1\right\}$$

eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

(b) Beweisen Sie, dass M homöomorph zur Standardsphäre

$$S^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

ist, d.h. es gibt eine bijektive stetige Abbildung $M \to S^2$, deren Umkehrung ebenfalls stetig ist.

4-4 Seien h, k, n natürliche Zahlen. Wir definieren das kartesische Produkt von h Kopien des $\mathbb{R}^n$ als

$$(\mathbb{R}^n)^h := \overbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}^{\text{h mal}} .$$

Wir schreiben die Elemente von $(\mathbb{R}^n)^h$ als $u = (u_i)$, wobei $u_1, \cdots, u_h \in \mathbb{R}^n$. Offensichtlich gilt $(\mathbb{R}^n)^h \simeq \mathbb{R}^{nh}$. Es sei nun $\mu : (\mathbb{R}^n)^h \to \mathbb{R}^k$ eine Multilinearform. Zeigen Sie, dass die Abbildung μ differenzierbar in allen Punkten $u \in (\mathbb{R}^n)^h$ ist mit

$$\mathrm{d}\mu_u(v) = \sum_{j=1}^{h} \mu(u_1, \cdots, \overset{\text{j−te Stelle}}{v_j}, \cdots, u_h), \qquad \forall v \in (\mathbb{R}^n)^h.$$

4-5 Es sei $\det : M_{\mathbb{R}}(n,n) \to \mathbb{R}$ die Determinante von $n \times n$ reellen Matrizen. Betrachten Sie die Funktion det als eine Multilinearform der Spalten der Matrix und zeigen Sie, dass det differenzierbar ist mit

$$\mathrm{d}\det_A(H) = \mathrm{tr}(\tilde{A}^T H),$$

wobei $\tilde{A}$ die Matrix der Cofaktoren ist. *(Hinweis: Erinnern Sie sich an die Formel $\tilde{A}^T A = \det(A) E_n$, wobei E_n die Einheitsmatrix ist)*. Schließen Sie daraus, dass die *spezielle lineare Gruppe*

$$SL(n) := \{A \in M_{\mathbb{R}}(n,n) \mid \det A = 1\}$$

als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2} = M_{\mathbb{R}}(n,n)$ aufgefaßt werden kann. Wie ist die Dimension bzw. Kodimension?

4-6 Gegeben sei die Standardsphäre S^2. Für jedes $i \in \{1,2,3\}$ setze

$$U_i^\pm = \{x \in S^2 \mid \pm x_i > 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die sechs Mengen $U_i^\pm$ Kartengebiete eines Atlas für die Sphäre S^2 bilden.

(b) Sei $p : x \in S^2 \to \{\pm x\} \in \mathbb{R}P^2 = S^2/\sim$ die kanonische Projektion auf die reell-projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$. Zeigen Sie, dass die drei Mengen $p(U_i^+), i = 1,2,3$ Kartengebiete eines Atlas für $\mathbb{R}P^2$ bilden.

(Hinweis: Die analoge Konstruktion ergibt für Dimension $n \geq 2$ einen Atlas für S^n bzw. $\mathbb{R}P^n$ mit $2(n+1)$ bzw. $n+1$ Karten)

4-7 Betrachten Sie die folgende Abbildung

$$f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4, \qquad f([x]) = (x_1x_2, x_1x_3, \tfrac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2), x_2x_3),$$

wobei $[x]$ die Äquivalenzklasse von $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass f wohldefiniert und injektiv ist.

(b) Beweisen Sie mittels des Atlas $\{U_i^+\}$, dass f glatt ist und dass für jedes $[x] \in \mathbb{R}P^2$ das Differential

$$\mathrm{d}f_{[x]} : T_{[x]}\mathbb{R}P^2 \to T_{f([x])}\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$$

eine injektive lineare Abbildung ist.

(c) Stellen Sie fest, dass $f : \mathbb{R}P^2 \to f(\mathbb{R}P^2)$ ein Homöomorphismus ist. Somit ergibt f eine Einbettung der reell-projektive Ebene ins $\mathbb{R}^4$.