Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2017/18

Dr. Gabriele Benedetti, Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher

Aufgaben, Serie 3, 26.10.2017

3-1 Sei $c : [0, a] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Kurve deren Krümmung κ überall positiv ist und setze man $\bar{\kappa} := \max_{t\in[0,a]} \kappa(t)$. Beweisen Sie, dass:

(a) Die Umlaufzahl n_c positiv ist und die folgende Äquivalenz gilt:

$$n_c = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c \text{ ist einfach.} \tag{1}$$

(b) Die Länge $L(c)$ nach unten beschränkt werden kann als

$$L(c) \geq \frac{2\pi n_c}{\bar{\kappa}} \tag{2}$$

und es ein $t \in [0, a]$ gibt mit der Eigenschaft

$$\kappa(t) = \frac{2\pi n_c}{L(c)}.$$

(c) Aus (1) und (2) die folgenden zwei Implikationen sich herleiten lassen:

$$\text{(i)} \quad c \text{ ist einfach} \qquad \Longrightarrow \qquad L(c) \geq \frac{2\pi}{\bar{\kappa}},$$

$$\text{(ii)} \quad c \text{ ist nicht einfach} \qquad \Longrightarrow \qquad L(c) \geq \frac{4\pi}{\bar{\kappa}}.$$

3-2 Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung $\kappa : I \to [0, \infty)$. Man definiere das *Tangentenbild* $e_1 : I \to \mathbb{R}^3$ durch die Gleichung $e_1(s) = \dot{c}(s)$, für alle $s \in I$. Zeigen Sie, dass:

(a) Die Spur von e_1 in der Einheitskugel S^2 enthalten ist;

(b) Die Kurve e_1 regulär ist genau dann wenn κ überall positiv ist. In diesem Fall prüfen Sie die folgende Formel für die Krümmung κ_1 der Kurve e_1:

$$\kappa_1^2 = 1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2},$$

wobei τ die Torsion von c ist. Folgern Sie aus dieser Gleichung und Aufgabe 2-3, dass τ/κ konstant ist genau dann, wenn die Spur des Tangentenbildes eine Kreislinie ist. Wann ist die Spur ein Großkreis?

3-3 Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ mit positiver Krümmung heißt *Böschungslinie* wenn $\tau/\kappa : I \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion ist. Zeigen Sie, dass c eine Böschungslinie ist genau dann, wenn es $u \in S^2$ gibt, so dass $\langle e_1, u\rangle : I \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion ist. In diesem Fall, gilt

$$\frac{\tau}{\kappa} = \cot\alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen e_1 und u ist.

3-4 Es sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ einer nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit positiver Krümmung. Es sei weiter angenommen, dass c geschlossen ist. Zeigen Sie, dass für jedes $u \in S^2$ gilt

$$\int_a^b \langle e_1(s), u \rangle \mathrm{d}s = 0.$$

Folgern Sie daraus, dass:

(a) Die Spur von e_1 in der Halbkugel $H(u) := \{P \in S^2 \mid \langle P, u \rangle \geq 0\}$ enthalten ist, genau dann, wenn die Spur von c in einer zu u orthogonalen Ebene enthalten ist.

(b) Eine Böschungslinie darf geschlossen nur dann sein, wenn sie eben ist.

3-5 Es sei $c : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge s parametrisierte, ebene, einfach geschlossene, streng konvexe Kurve. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $\kappa > 0$ und $e_2(0) = (1, 0)$. Es sei nun $v : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ die Parametrisierung des Einheitskreises $v(\varphi) := (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Zeigen Sie, dass es eine glatte streng wachsende Funktion $\varphi : [0, L] \to [0, 2\pi]$ gibt mit der Eigenschaft

$$e_2(s) = v(\varphi(s)), \qquad \varphi(0) = 0, \qquad \varphi(L) = 2\pi.$$

Es sei nun auch mit $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ die Umparametrisierung der Kurve nach φ gekennzeichnet. Es sei angenommen, dass der Ursprung O in der beschränkten Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus c([0, 2\pi])$ liegt, d.h. $\langle O - c, e_2 \rangle > 0$.

(a) Beweisen Sie, dass für jedes $\varphi \in [0, 2\pi]$, ein Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ auf der Tangente $\mathbf{t}(\varphi)$ an c im Punkt $c(\varphi)$ liegt genau dann, wenn

$$\langle v(\varphi), P \rangle = a(\varphi),$$

wobei $a : [0, 2\pi] \to (0, +\infty)$ der Abstand zwischen der Gerade $\mathbf{t}$ und dem Ursprung O darstellt.

(b) Zeigen Sie, dass $\langle c(\varphi), Jv(\varphi) \rangle = a(\varphi)$ und $\langle c'(\varphi), Jv(\varphi) \rangle = 0$ und folgern Sie daraus, dass

$$c(\varphi) = a'(\varphi)v(\varphi) + a(\varphi)Jv(\varphi).$$

(c) Herleiten Sie die Formel $|c'(\varphi)| = a(\varphi) + a''(\varphi) = \kappa^{-1}(\varphi)$ und folgern Sie daraus, dass

$$L(c) = \int_0^{2\pi} a(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

(d) Für jedes $\varphi \in [0, 2\pi]$ zeigen Sie, dass die Tangenten $\mathbf{t}(\varphi)$ und $\mathbf{t}(2\pi - \varphi)$ parallel sind und den Abstand $b(\varphi) := a(\varphi) + a(2\pi - \varphi)$ besitzen. Folgern Sie daraus, dass

$$L(c) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} b(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

(e) Wir sagen, dass c *konstante Breite*[1] b besitzt, wenn der Abstand zwischen parallelen Tangenten an c immer gleich b ist. Stellen Sie fest, dass die Länge einer solchen Kurve gegeben ist durch:

$$L(c) = \pi b.$$

[1] Es gibt viele Kurven konstanter Breite (nicht nur den Kreis), z.B. die Reuleaux-Polygone.