Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2017/18

Dr. Gabriele Benedetti, Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher

Aufgaben, Serie 2, 23.10.2017

2-1 Es sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und $B_r(M)$ der geschlossene Ball mit Mittelpunkt $M \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$:

$$B_r(M) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x - M| \leq r \right\}.$$

Man nehme an, dass c in $B_r(M)$ enthalten ist und dass ein $s_0 \in (a, b)$ existiert mit der Eigenschaft

$$|c(s_0) - M| = \max_{s \in [a,b]} |c(s) - M|.$$

Zeigen Sie, dass

$$\langle \dot{c}(s_0), c(s_0) - M \rangle = 0, \qquad \frac{1}{r} \leq \left\langle \ddot{c}(s_0), -\frac{c(s_0) - M}{|c(s_0) - M|} \right\rangle.$$

Folgern Sie daraus, dass die erste Krümmung in s_0 mindestens $1/r$ ist:

$$\frac{1}{r} \leq \kappa_1(s_0).$$

2-2 Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung $\kappa > 0$ und Torsion τ, wobei $\tau(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Für jedes $M \in \mathbb{R}^3$ bildet man die Funktion

$$f_M : I \to \mathbb{R}, \qquad f_M(s) := \frac{1}{2}|c(s) - M|^2.$$

Für jedes $s_0 \in I$ definiert man den Mittelpunkt $m(s_0) \in \mathbb{R}^3$ der Schmiegkugel von c in $c(s_0)$ als den einzigen Punkt des $\mathbb{R}^3$, für den

$$\frac{\mathrm{d}^k f_{m(s_0)}}{\mathrm{d}s^k}(s_0) = 0, \qquad \text{für } k = 1, 2, 3$$

und der Schmiegradius ist definert als $r(s_0) := |c(s_0) - m(s_0)|$.

(a) Aus der obigen Gleichung folgern Sie, dass

$$\begin{cases} \langle c(s_0) - m(s_0), \dot{c}(s_0) \rangle = 0, \\ \langle c(s_0) - m(s_0), \ddot{c}(s_0) \rangle + 1 = 0, \\ \langle c(s_0) - m(s_0), \dddot{c}(s_0) \rangle = 0. \end{cases} \tag{1}$$

(b) Die Kurve $m : I \to \mathbb{R}^3$ der Mittelpunkte heißt Evolute der Kurve c. Nach Ableitung nach s_0 in der ersten und zweiten Gleichung in (1) zeigen Sie, dass der Tangentenvektor von m parallel zum Binormalenvektor von c ist.

(c) Betrachten Sie den folgenden Ausdruck für alle $s \in I$

$$m(s) = c(s) + \alpha_1(s)e_1(s) + \alpha_1(s)e_2(s) + \alpha_3(s)e_3(s),$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : I \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen sind und (e_1, e_2, e_3) das begleitende 3-Bein von c ist. Zeigen Sie, dass

$$\alpha_1(s) = 0, \qquad \alpha_2(s) = \frac{1}{\kappa(s)}, \qquad \alpha_3(s) = -\frac{\dot{\kappa}(s)}{\tau(s)\kappa^2(s)}.$$

Herleiten Sie daraus die folgende Formel für den Schmiegradius

$$r^2(s) = \frac{1}{\kappa^2(s)} + \frac{\dot{\kappa}^2(s)}{\tau^2(s)\kappa^4(s)}, \qquad \forall s \in I.$$

(d) Es sei nun angenommen, dass $\dot{\kappa}(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Für alle $\rho > 0$ zeigen Sie, dass die Kurve c auf einer Kugel mit Radius r liegt, genau dann, wenn

$$r^2 = \frac{1}{\kappa^2(s)} + \frac{\dot{\kappa}^2(s)}{\tau^2(s)\kappa^4(s)}, \qquad \forall s \in I.$$

Hinweis: Berechnen Sie die Ableitung von $s \mapsto |m(s) - c(s)|^2$.

2-3 Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve mit Krümmung $\kappa > 0$ und Torsion τ, die auf einem Kugel läuft. Zeigen Sie, dass κ konstant ist, genau dann, wenn c ebene ist. Um welche Kurve handelt es sich in diesem Fall?

2-4 Betrachten Sie die Kurve von Viviani

$$v : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad v(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2\sin(t/2)).$$

Zeigen Sie, dass v die Schnittmenge zwischen einer Kugel (Mittelpunkt der Ursprung und Radius 2) und einem Zylinder (mit Gleichung $(x-1)^2+y^2 = 1$) ist. Skizzieren Sie die Kurve und finden Sie die Krümmung und Torsion für $t = 0$.

2-5 Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine Raumkurve, für die c' und c'' in jedem Punkt linear unabhängig sind.

(a) Die Gerade $s \in \mathbb{R} \mapsto c(t_0) + se_2(t_0) \in \mathbb{R}^3$ heißt die *Normale* an c in t_0. Zeigen Sie:
Wenn alle Normalen der Kurve c durch einen festen Punkt gehen, dann ist c Teil einer Kreislinie.

(b) Die Ebene $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto c(t_0) + s_1e_1(t_0) + s_2e_2(t_0)$ heißt *Schmiegebene* an c in t_0. Zeigen Sie:
Wenn alle die Schmiegebenen der Kurve c durch einen festen Punkt gehen, dann ist c eine ebene Kurve.

(c) Die Gerade $s \in \mathbb{R} \mapsto c(t_0) + se_3(t_0) \in \mathbb{R}^3$ heißt die *Binormale* an c in t_0. Zeigen Sie, dass es keinen festen Punkt des $\mathbb{R}^3$ gibt, durch den alle Binormalen der Kurve c gehen.