Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2017/18

Dr. Gabriele Benedetti Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher

Aufgaben Serie 14, 29.01.2018

14-1 Es sei M eine kompakte Fläche ohne Rand eingebettet in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $p \in M$ mit $K(p) > 0$ gibt.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\beta : M \to [0, +\infty)$, $\beta(x) = \frac{1}{2}|x|^2$, wobei $|\cdot|$ den Betrag eines Vektors des $\mathbb{R}^3$ kennzeichnet. Es sei $p \in M$ ein Maximum von β (Warum existiert es?). Zeigen Sie, dass

$$II(X,X)_p \geq \frac{I(X,X)_p}{|p|^2}, \qquad \forall\, X \in T_pM$$

(Man benutze Flächenkurven, die durch p laufen, und die Aufgabe 2-1).

14-2 Es sei M eine kompakte zusammenhängende Fläche ohne Rand eingebettet in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass, wenn M nicht diffeomorph zu S^2 ist, es dann drei Punkte p_-, p_0, p_+ auf M mit den folgenden Eigenschaften gibt:

$$K(p_-) < 0, \qquad K(p_0) = 0, \qquad K(p_+) > 0.$$

14-3 Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, die diffeomorph zu S^2 ist. Eine Kurve c auf M heißt *einfach geschlossen*, wenn c eine Abbildung $c : [a, b] \to M$ mit den folgenden Eigenschaften ist:

$$c(a) = c(b), \qquad c'(a) = c'(b) \qquad c|_{[a,b)} \text{ injektiv.}$$

Zeigen Sie, dass, wenn die Gauß-Krümmung von M positiv ist, dann zwei verschiedene einfach geschlossene Geodätische c_1, c_2 auf M sich schneiden.

14-4 Es sei (M, g) eine 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine geschlossene Kurve c auf M heißt einfaches geodätisches n-Eck, wenn c die Verkettung von n Stücken von Geodätischen ist und ebenso der Rand von einer Teilmenge B von M ist, wobei B homöomorph zu einer Scheibe ist. Beweisen Sie, dass, wenn $K \leq 0$ überall ist, es dann kein einfaches geodätisches 1- oder 2-Eck gibt.

14-5 Es sei (M, g) eine 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, wobei M diffeomorph zum Zylinder $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ ist. Zeigen Sie, dass, wenn $K < 0$, die folgenden Aussagen wahr sind.

(a) Der Rand ist einer Scheibe keine einfach geschlossene Geodätische.

(b) Zwei einfach geschlossene Geodätischen müssen sich schneiden.

14-6 Gegeben ist eine Metrik auf einer Fläche, deren Darstellung bezüglich der Koordinaten $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ die folgende Gestalt hat:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2(u,v) \end{pmatrix}.$$

Es sei $\kappa_g^v(u,v)$ die geodätische Krümmung der v-Linie, die durch den Punkt (u,v) geht. Zeigen Sie, dass

$$\kappa_g^v(u,v) = \frac{\partial_u a(u,v)}{a(u,v)}, \qquad K(u,v) = -\frac{\partial_{uu}^2 a(u,v)}{a(u,v)}.$$

14-7 Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ das Paraboloid mit der Parametrisierung

$$f : (0,+\infty) \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2).$$

Für jedes $r > 0$ sei die Region $M_r := \{(u,v) \in (0,+\infty) \times [0,2\pi] \mid u \leq r\}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die geodätische Krümmung des Randes von M_r und das Integral

$$\int_{\partial M_r} \kappa_g \mathrm{d}s.$$

(b) Berechnen Sie die Euler-Charakteristik von M_r.

(c) Leiten Sie aus der Gauß-Bonnet Formel das Integral $\int_{M_r} K \mathrm{d}A$ her. Bestimmen Sie seinen Limes für $r \to +\infty$.

(d) Es sei nun $\nu : M \to S^2$ die Gauß-Abbildung. Bestimmen Sie die Bildmenge $\nu(M) \subset S^2$ und berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

14-8 Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Gauß-Abbildung $\nu : M \to S^2$. Zeigen Sie, dass für die geodätische Krümmung einer regulären Flächenkurve $c : I \to M$

$$\kappa_g(t) = \frac{\langle c''(t), \nu_{c(t)} \times c'(t) \rangle}{|c'(t)|^3}$$

gilt.

14-9 Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine abgeschlossene reguläre Kurve mit $\kappa > 0$ und sei $\mathbf{n} : I \to S^2$ das Normalensphärischenbild von c. Es sei κ_g die geodätische Krümmung von $\mathbf{n}$, wenn sie als Flächenkurve auf S^2 betrachtet wird.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\kappa_g = \frac{\kappa\dot{\tau} - \dot{\kappa}\tau}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wobei τ die Torsion von c ist und der Punkt $\cdot$ die Ableitung nach dem Bogenelement s_c von c kennzeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_I \kappa_g \mathrm{d}s_{\mathbf{n}} = 0,$$

wobei $s_{\mathbf{n}}$ das Bogenelement von $\mathbf{n}$ ist.

Hinweis: Wechseln Sie die Integrationsvariablen von $s_{\mathbf{n}}$ zu s_c mittels der Transformationsformel für das Integral. Benutzen Sie anschließend die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_c} \arctan\left(1 + \frac{\tau}{\kappa}\right) = \frac{\kappa\dot{\tau} - \dot{\kappa}\tau}{\kappa^2 + \tau^2}.$$

(c) Sei nun $\mathfrak{n} : I \to S^2$ einfach geschlossen. Beweisen Sie, dass $\mathbf{n}$ dann die Sphäre S^2 in zwei Regionen mit gleichem Flächeninhalt teilt.