Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2017/18

Dr. Gabriele Benedetti Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher

Aufgaben Serie 13, 22.01.2018

13-1 Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei die Abbildung

$$f : (t,s) \in (0,1) \times (0,\infty) \longmapsto f(t,s) = c(t) + sc'(t) \in \mathbb{R}^3$$

gegeben.

(a) Geben Sie eine Bedingung an die Kurve an, unter der die Abbildung die Parametrisierung einer Fläche in $\mathbb{R}^3$ definiert.

(b) Bestimmen Sie in diesem Fall die erste Fundamentalform, die Hauptkrümmungen und die Hauptkrümmungsrichtungen. Was ist die Gauß-Krümmung von f?

13-2 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ das Flächenstück $f(u,v) = (u, v, uv)$.

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial u}$ und $\frac{\partial f}{\partial v}$ und zeigen Sie somit, dass die Abbildung $\mathrm{d}f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vollen Rang besitzt. Berechnen Sie die Gauß-Abbildung $\nu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ der Fläche.

(b) Berechnen Sie die erste und die zweite Fundamentalform.

(c) Berechnen Sie die Gauß-Krümmung und die mittlere Krümmung in allen punkten der Fläche.

(d) Berechnen Sie die Hauptkrümmungen und die Hauptkrümmungsrichtungen in $(u,v) = (0,0)$.

13-3 Es sei M ein parametrisiertes Flächenstück in $\mathbb{R}^3$. Das heißt, dass M die Bildmenge einer Immersion $f : U \to \mathbb{R}^3$ ist. Weiter sei $\nu : U \to S^2$ das Einheitsnormalenfeld von M. Zeigen Sie:

(a) ν ist konstant genau dann, wenn M in einer Ebene enthalten ist.

(b) Es gibt eine Konstante $\rho \neq 0$ mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{d}f = \rho \mathrm{d}\nu$ genau dann, wenn M Teilmenge einer Sphäre mit Radius $|\rho|$ ist.

13-4 Es sei M ein parametrisiertes Flächenstück in $\mathbb{R}^3$ mit Parametrisierung $f : U \to \mathbb{R}^3$. Es sei angenommen, dass jedes $p \in M$ ein Nabelpunkt ist. Das heißt, dass für jedes $p \in M$ die Weingarten-Abbildung $S = \mathrm{d}\nu \circ (\mathrm{d}_p f)^{-1} : T_pM \to T_pM$ ein Vielfaches der Identität ist:

$$S_p \cdot X = \lambda(p) X, \qquad \forall\, X \in T_pM.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $\lambda : U \to \mathbb{R}$ konstant ist.

Hinweis: Schreiben Sie die Gleichung für $X = \frac{\partial f}{\partial x^1}$ *bzw.* $X = \frac{\partial f}{\partial x^2}$ *auf und leiten Sie nach* x^2 *bzw.* x^1 *ab.*

Folgern Sie dann aus der Aufgabe 2, dass M in einer Ebene oder in einer Sphäre enthalten ist.

13-5 Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung κ, die in einem Flächenstück M enthalten ist. Zeigen Sie, dass c eine Geodätische ist genau dann, wenn

$$\mathbf{n}(t) = \nu(c(t)), \qquad \forall\, t \in I,$$

wobei $\mathbf{n}$ der Normalenvektor von c ist und $\nu : M \to S^2$ die Gauß-Abbildung ist.

13-6 (a) Es sei $c : I \to M$ eine Geodätische auf einer Fläche in $\mathbb{R}^3$ und sei angenommen, dass die Krümmung κ von c nirgends verschwindet. Zeigen Sie, dass c genau dann eben ist, wenn c eine *Krümmungslinie* ist. (Nämlich ist für jedes $t \in I$ die Geschwindigkeit $c'(t)$ eine Hauptkrümmungsrichtung.)

(b) Ist eine ebene Krümmungslinie eine Geodätische? *Hinweis: Rotationsfläche.*

(c) Finden Sie eine Fläche M in $\mathbb{R}^3$ und eine Gerade $L \subset M$, die keine Krümmungslinie ist. *Hinweis: Aufgabe 2.*

13-7 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ das Ennepersche Flächenstück:

$$f(u,v) = \Big(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\Big).$$

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial u}$ und $\frac{\partial f}{\partial v}$ und zeigen Sie somit, dass die Abbildung $\mathrm{d}f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vollen Rang in jedem Punkt besitzt. Berechnen Sie die Gauß-Abbildung $\nu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ der Fläche.

(b) Berechnen Sie die erste und die zweite Fundamentalform.

(c) Berechnen Sie die Hauptkrümmungen, die Gauß-Krümmung und die mittlere Krümmung in allen punkten der Fläche.

(d) Finden Sie die Krümmungslinien.

13-8 Für welche reellen Zahlen a, b gibt es eine Fläche in $\mathbb{R}^3$, so dass die 1. und 2. Fundamentalform I, II bezüglich einer Parametrisierung die folgende Gestalt haben?

$$I = \begin{pmatrix} 41 & 0 \\ 0 & 41 \end{pmatrix}, \qquad II = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$