Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2017/18

Dr. Gabriele Benedetti   Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher

Aufgaben Serie 12, 15.01.2018

12-1 Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und man definiere

$$(V^*)^{\otimes 4} := V^* \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^*.$$

Es sei $\mathcal{R} \subset (V^*)^{\otimes 4}$ der Untervektorraum dessen Elemente R den folgenden Symmetrien genügen:

$$\begin{aligned}
(i)\quad & R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_2, v_1, v_3, v_4),\\
(ii)\quad & R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_1, v_2, v_4, v_3),\\
(iii)\quad & R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_3, v_1, v_2, v_4) + R(v_2, v_3, v_1, v_4) = 0.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$\dim \mathcal{R} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Hinweis: Wenn (e_i) eine Basis von V ist, müssen Sie herausfinden, wie viele von den reellen Zahlen $R(e_i, e_j, e_k, e_l)$ Sie frei wählen können, um R zu bestimmen. Aus den antisymmetrischen Bedingungen (i) und (ii) folgt, dass es höchstens $\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ solche Zahlen geben kann. Sei nun den Index l fest. Zeigen Sie, dass für jede Menge $\{i, j, k\}$ die Eigenschaft (iii) eine neue Bedingung für die Zahlen $R(e_i, e_j, e_k, e_l)$ liefert genau dann, wenn i, j, k alle verschieden sind. Wie viele solche 3-elementigen Mengen $\{i, j, k\}$ gibt es für jedes l?

12-2 Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\varphi : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Man definiere den Gradienten von φ bezüglich g als das einzige Vektorfeld $\nabla\varphi \in \mathcal{X}(M)$, für das $g(\nabla\varphi, v) = \mathrm{d}\varphi(v)$ für alle $v \in TM$ gilt. Es sei $g_\varphi = e^{2\varphi} g$ und ∇, ∇^φ der Levi-Civita Zusammenhang für g bzw. g_φ. Zeigen Sie, dass für alle $v \in TM$ und $X \in \mathcal{X}(M)$ gilt

$$\nabla^\varphi_v X = \nabla_v X + \Big(\mathrm{d}\varphi(v) X + \mathrm{d}\varphi(X) v - g(v, X)\nabla\varphi\Big).$$

12-3 Es seien (M, g_M) und (N, g_N) zwei Riemannschen Mannigfaltigkeiten und man betrachte das Produkt $(M \times N, g_M + g_N)$. Es seien $\nabla^M, \nabla^N, \nabla^{M\times N}$ die entsprechenden Levi-Civita Zusammenhänge. Zeigen Sie, dass für alle $X_M, Y_M \in \mathcal{X}(M), X_N, Y_N \in \mathcal{X}(N)$,

$$\nabla^{M\times N}_{X_M} Y_M = \nabla^M_{X_M} Y_M, \qquad \nabla^{M\times N}_{X_N} Y_N = \nabla^N_{X_N} Y_N,$$
$$\nabla^{M\times N}_{X_M} Y_N = 0, \qquad \nabla^{M\times N}_{X_N} Y_M = 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie Koordinatenvektorfelder und die Koszul Formel.

Folgern Sie daraus, dass

$$R_{M\times N}(X_M,Y_N)Z=0,\quad R_{M\times N}(X_M,Y_M)Z_N=0,\quad R_{M\times N}(X_N,Y_N)Z_M=0,$$
$$K_{M\times N}(X_M,Y_M)=K_M(X_M,Y_M),\qquad K_{M\times N}(X_N,Y_N)=K_N(X_N,Y_N).$$

12-4 Es sei $A\in M_{\mathbb{R}}(3,3)$ eine 3×3-Matrix mit Spalten A^1,A^2,A^3. Wir betrachten die Matrix der Kofaktoren $A^*\in M_{\mathbb{R}}(3,3)$ von A deren Spalten

$$(A^*)^1=A^2\times A^3,\qquad (A^*)^2=A^3\times A^1,\qquad (A^*)^3=A^1\times A^2$$

sind. Zeigen Sie, dass

$$(Au)\times(Av)=A^*(u\times v),\qquad \forall\, u,v\in\mathbb{R}^3.$$

Hinweis: Es ist genug, die Gleichung für Koordinatenvektoren zu zeigen.

12-5 Es sei $S\subset\mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück in $\mathbb{R}^3$ mit Gauß-Abbildung $\nu: S\to\mathbb{R}^3$. Es sei $p\in S$ und $X,Y\in T_pS\subset\mathbb{R}^3$ zwei Vektoren mit der Eigenschaft, dass (X,Y,ν) eine positive orthonormale Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Zeigen Sie, dass die Gauß-Krümmung die folgende Gestalt besitzt:

$$K=\langle\nu,\mathrm{d}\nu(X)\times\mathrm{d}\nu(Y)\rangle.$$

12-6 Es sei $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ eine glatte Funktion und a eine reelle Zahl. Es sei angenommen, dass die Faser $\varphi^{-1}(a):=\{p\in\mathbb{R}\mid\varphi(p)=a\}$ nicht leer ist und dass $\nabla\varphi(p)\neq 0$ für alle $p\in\varphi^{-1}(a)$. Zeigen Sie, dass die Gauß-Abbildung $\nu:\varphi^{-1}(a)\to\mathbb{R}^3$ sich dann als

$$\nu=\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$$

schreiben lässt. Weiter Sei $H(\varphi)$ die Hesse-Matrix von φ. Die i-te Spalte von $H(\varphi)$ ist nämlich definiert als der Vektor $\nabla_{\partial_{x^i}}\nabla\varphi$. Zeigen Sie mittels Aufagen 4 und 5, dass die Gauß-Krümmung der Fläche $\varphi^{-1}(a)$ sich als

$$K=\frac{\nabla\varphi^T\cdot H(\varphi)^*\cdot\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^4}$$

schreiben lässt.

12-7 Es seien a,b,c positive reelle Zahlen und

$$E_{a,b,c}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$$

ein Ellipsoid. Geben Sie eine Formel für die Gauß-Krümmung von $E_{a,b,c}$ in einem beliebigen Punkt $(x,y,z)\in E_{a,b,c}$ an. Was ist die Gauß-Krümmung in den Scheitelpunkten?