Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2017/18

Dr. Gabriele Benedetti   Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher

Aufgaben Serie 11, 8.1.2018

11-1 Es sei der Schiefkörper der Quaternionen definiert durch

$$\begin{cases} \mathbb{H} := \big\{\mathbf{h} = a\mathbf{1} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \;\big|\; a, x, y, z \in \mathbb{R}\big\}, \\ \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = (a_1 + a_2)\mathbf{1} + (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j} + (z_1 + z_2)\mathbf{k} \\ \text{Die Multiplikation ist } \mathbb{R}\text{-bilinear}, \\ \mathbf{1} \text{ ist das Einselement}, \\ \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}. \end{cases}$$

Wir identifizieren $\mathbb{H} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, $\mathbf{h} \mapsto (a, v)$, wobei $v = (x, y, z)$. Wir definieren die Konjugation und das Skalarprodukt

$$\overline{\mathbf{h}} := (a, -v), \qquad \langle \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \rangle = a_1 a_2 + \langle v_1, v_2 \rangle,$$

wobei $\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Es sei $S^3 \subset \mathbb{H}$ die Menge der Quaternionen mit Norm 1. Beweisen Sie, dass für alle $\mathbf{h}, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{H}$ die folgenden Aussagen gelten.

(a) (i) $\overline{\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2} = \overline{\mathbf{h}}_2\overline{\mathbf{h}}_1$, (ii) $|\mathbf{h}|^2 = \mathbf{h}\overline{\mathbf{h}}$,
(iii) $(\mathbf{h}_1\mathbf{h})\overline{(\mathbf{h}_2\mathbf{h})} = |\mathbf{h}|^2\mathbf{h}_1\overline{\mathbf{h}}_2$, (iv) $|\mathbf{h}_1\mathbf{h}| = |\mathbf{h}_1| \cdot |\mathbf{h}|$.

(b) Die Formel

$$\mathbf{h}_1\overline{\mathbf{h}}_2 = \big(\langle \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \rangle, a_2 v_1 - a_1 v_2 - v_1 \times v_2\big),$$

ist wahr, wobei $\times$ das Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$ gekennzeichnet. Folgern Sie daraus, dass

$$v_1 v_2 = -\langle v_1, v_2 \rangle + v_1 \times v_2. \tag{$\star$}$$

(c) Wenn $\mathbf{h} \in S^3$ und wir identifizieren $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4, \qquad \mathbf{h}_1 \mapsto \mathbf{h}^{-1}\mathbf{h}_1$$

reell linear und erhält das Skalarprodukt. Man kann auch zeigen, dass die Abbildung orientierungserhaltend ist. Deswegen ist die Matrix $A_{\mathbf{h}}$, die diese Abbildung darstellt, ein Element von $SO(4)$.

11-2 Wir identifizieren nun $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$ durch die Abbildung $\mathbf{h} \mapsto (u, w)$, wobei $u = a + xi$ und $w = y + zi$ komplexe Zahlen sind. Es sei

$$\langle (u_1, w_1), (u_2, w_2) \rangle_{\mathbb{C}^2} := u_1\bar{u}_2 + w_1\bar{w}_2, \quad \forall\, (u_1, w_1), (u_2, w_2) \in \mathbb{C}^2$$

das Hermitesche Standardprodukt. Zeigen Sie, dass nach der obigen Identifizierung die folgenden Aussagen für alle $\mathbf{h}, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{H}$ gelten.

(a) $\mathbf{ih} = (iu, iw)$, $\langle \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \rangle_{\mathbb{C}^2} = \langle \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \rangle + (a_2 x_1 - a_1 x_2)i$;

(b) Die Abbildung

$$\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \qquad \mathbf{h}_1 \mapsto \mathbf{h}_1\mathbf{h}$$

- komplex linear ist,
- das Hermitesche Skalarprodukt erhält,
- durch die Matrix

$$B_{\mathbf{h}} := \begin{pmatrix} u & w \\ -\bar{w} & \bar{u} \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{C}}(2,2)$$

dargestellt werden kann.

Bemerken Sie, dass die Matrizen dieser Art die spezielle unitarsche Gruppe $SU(2)$ bilden, d.h.

$$\langle B_{\mathbf{h}}(u_1,w_1), B_{\mathbf{h}}(u_2,w_2)\rangle_{\mathbb{C}^2} = \langle (u_1,w_1),(u_2,w_2)\rangle_{\mathbb{C}^2}, \qquad \det B_{\mathbf{h}} = 1.$$

Folgern Sie, daraus, dass der Tangentialraum von $SU(2)$ in der Einheitsmatrix durch die folgenden drei Matrizen aufgespannt ist, die eine Basis des Raums der spurlosen anti-Hermitesche Matrizen sind:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

11-3 Wir identifizieren $\mathbb{R}^3$ mit dem von $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ aufgespannten reellen Untervektorraum von $\mathbb{H}$. Es folgt aus den obigen Aufgaben, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad v_1 \mapsto \mathbf{h}v_1\mathbf{h}^{-1}, \qquad v_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},$$

reell linear, orthogonal und orientierungserhaltend ist. Das heißt, dass die entsprechende Matrix $Q(\mathbf{h})$ ein Element von $SO(3)$ ist. Also gewinnen wir eine Abbildung

$$Q : S^3 \to SO(3), \qquad Q(\mathbf{h})v_1 = \mathbf{h}v_1\mathbf{h}^{-1}.$$

(a) Zeigen Sie, dass Q ein glatter Lie-Gruppen Homomorphismus. Hinweis: Für die Differenzierbarkeit berechnen Sie die folgende Formel.

$$Q(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} a^2+x^2-y^2-z^2 & 2xy-2az & 2xz+2ay \\ 2xy+2az & a^2-x^2+y^2-z^2 & 2yz-2ax \\ 2xz-2ay & 2yz+2ax & a^2-x^2-y^2+z^2 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{d}Q_{\mathbf{1}}(\sigma_m)$, für $m = 1,2,3$.

(c) Es sei $\mathbf{h} = (a,v) \in S^3$ mit $v \neq 0$ (das passiert genau dann wenn $\mathbf{h} \neq \pm\mathbf{1}$). Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}\,v$ die Drehungsachse von $Q(\mathbf{h})$ ist, dass heißt $Q(\mathbf{h})v = v$. Hinweis: Schreiben Sie $v = \mathbf{h} - a\mathbf{1}$ und benutzen Sie, dass $\mathbf{1}$ das Einselement ist.

(d) Es sei $\mathbf{h} = (a,v) \in S^3$ mit $v \neq 0$. Zeigen Sie, dass der Drehwinkel $\vartheta(\mathfrak{h}) \in (0,2\pi)$ von $Q(\mathbf{h})$ um die Achse v durch die folgenden Gleichungen bestimmt ist

$$\cos\frac{\vartheta(\mathbf{h})}{2} = a, \qquad \sin\frac{\vartheta(\mathbf{h})}{2} = |v|.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\hat{v} = v/|v|$, $\mathbf{h} = a + |v|\hat{v}$, nehmen Sie eine beliebige positive orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ derart $v_1, v_1^{\perp}, u$. Benutzen Sie dann die Gliechung $(\star)$ um zu zeigen

$$Q(\mathbf{h})v_1 = (a^2 - |v|^2)v_1 + 2a|v|v_1^{\perp}.$$

Folgern Sie daraus, dass Q surjektiv ist und $\ker Q = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$. Insbesondere ist $SO(3)$ isomorph zu $S^3/\ker Q \cong \mathbb{RP}^3$.