Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2017/18

Dr. Gabriele Benedetti   Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher

Aufgaben Serie 10, 18.12.2017

10-1 Für jede $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ betrachten Sie die Exponentialmatrix

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften für alle $A, B \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$:

(i) $\exp(A)$ konvergiert;

(ii) es gilt $\exp(A)^T = \exp(A^T)$;

(iii) wenn B invertierbar ist, dann $\exp(BAB^{-1}) = \exp(A)$;

(iv) falls $[A,B] = 0$, dann $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$;

(v) $\exp(A)$ ist invertierbar mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$;

(vi) wenn $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ ist, dann ist v auch ein Eigenvektor von $\exp(A)$ mit Eigenwert e^{λ};

(vii) es gilt $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Spur}(A)}$;

(viii) die Abbildung $A \mapsto \exp(A)$ ist glatt (sogar reell analytisch).

10-2 Es sei die Heisenberg Gruppe $\mathcal{H} \subset GL_3(\mathbb{R})$ definiert durch

$$\mathcal{H} := \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}$ eine Untergruppe von $GL_3(\mathbb{R})$ ist. Die Abbildung $A \mapsto (a_1, a_2, a_3)$ liefert eine globale Karte auf $\mathcal{H}$. Schreiben Sie die Produktabbildung $(A,B) \mapsto A \cdot B$ bezüglich dieser Karte. Ist die Heisenberg Gruppe kommutativ? Zeigen Sie, dass

$$T_E\mathcal{H} = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Berechnen Sie die Lie-Klammer von zwei Vektoren in $T_E\mathcal{H}$ nach der Identifizierung $T_E\mathcal{H} \cong \mathbb{R}^3$, $X \mapsto (x_1, x_2, x_3)$.

10-3 Es sei G eine Lie-Gruppe und $X \in \mathfrak{g}$ ein linksinvariantes Vektorfeld mit Fluß $t \mapsto (\Phi_X^t : G \to G)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $g, h \in G$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$g\Phi_X^t(h) = \Phi_X^t(gh).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass beide Seiten Lösungen des Anfangswertproblemes $\dot{c}(t) = X(c(t))$, $c(0) = gh$ *sind.*

(b) Es sei $\exp_X : \mathbb{R} \to G$ definiert als $\exp_X(t) = \Phi_X^t(e)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass, wenn $R_g : G \to G$ die rechte Multiplikation durch irgendwelches $g \in G$ kennzeichnet, dann

$$\Phi_X^t = R_{\exp_X(t)}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

(c) Zeigen Sie, dass $\exp_X : \mathbb{R} \to G$ eine 1-Parameter-Untergruppe von G ist, nämlich dass exp ein Homomorphismus ist:

$$\exp_X(s)\exp_X(t) = \exp_X(s+t), \qquad \forall\, s, t \in \mathbb{R}.$$

10-4 Es sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Für jedes $g \in G$ liefert die Konjugation

$$C_g : G \to G, \qquad C_g(h) = g^{-1}hg$$

einen Homomorphismus $C_g : G \to G$. Man definiere die adjunkte Darstellung als

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \qquad \mathrm{Ad}_g = \mathrm{d}_e C_g,$$

wobei $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ die Gruppe der invertierbaren linearen Endomorphismen von $\mathfrak{g}$ ist. Man definiere

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \qquad \mathrm{ad}_X = \mathrm{d}_e \mathrm{Ad}(X), \qquad \forall\, X \in \mathfrak{g},$$

wobei $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ der Vektorraum der Endomorphismen von $\mathfrak{g}$ ist. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 10-3(b) und die Formel (ohne Beweis)

$$[X, Y]_g = \lim_{t \to 0} \mathrm{d}_{\Phi_X^t(g)} \Phi_X^{-t}(Y_{\Phi_X^t(g)}), \qquad \forall\, g \in G.$$

(b) Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine linksinvariante Metrik auf G und man kennzeichne mit $O(\mathfrak{g})$ die Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ dessen Elementen das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erhalten. Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rechtsinvariant ist genau dann, wenn $\mathrm{Ad}(G) \subset O(\mathfrak{g})$ und dass, in diesem Fall,

$$\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle, \qquad \forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

10-5 Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine biinvariante Metrik auf einer Lie-Gruppe G mit Zusammenhang ∇ und Krümmung R. Zeigen Sie, dass für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

- $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$,
- $R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z]$,
- $R(X, Y, Z, W) = -\frac{1}{4}\langle [X, Y], [Z, W] \rangle$.

Schlußfolgern Sie, dass alle die Schnittkrümmungen nicht negativ sind.