Differentialgeometrie 1

Leipzig, Wintersemester 2017/18

Dr. Gabriele Benedetti, Prof. Dr. Hans-Bert Rademacher

Aufgaben, Blatt 1, 16.10.2017

1-1 Es sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve. Wir geben dem Parameter $t \in I$ die Dimension T einer Zeit und den zwei Koordinaten des $\mathbb{R}^2$ die Dimension L einer Länge.

(a) Bestimmen Sie die Dimension der folgenden Größen, die der Kurve c zugeordnet sind:

- die Bogenlänge $s : I \to \mathbb{R}$;
- das begleitende 2-Bein (e_1, e_2);
- die Krümmung κ.

(b) Es sei $r > 0$ eine dimensionslose reelle Zahl und $c_r : I \to \mathbb{R}^2$ die gestreckte Kurve

$$c_r(t) = r\, c(t), \qquad \forall t \in I.$$

Berechnen Sie die Bogenlänge, das 2-Bein und die Krümmung von c_r. Ist Ihre Antwort verträglich mit dem Punkt (a)?

1-2 Ein Rad vom Radius $r > 0$ rollt gleichmäßig auf einer Geraden ab. Ein fester Punkt auf der Lauffläche des Rads beschreibt eine Kurve c (*Zykloide*).

(a) Geben Sie eine Parametrisierung an und skizzieren Sie die Kurve.

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve, die einer Umdrehung entspricht.

(c) Berechnen Sie die Krümmung der Kurve.

1-3 Eine reguläre ebene Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ist durch den Polarwinkel φ parametrisiert. Das heißt, dass sie in Polarkoordinaten (r, φ) durch $r = r(\varphi)$ und in kartesischen Koordinaten durch

$$\begin{cases} x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

gegeben ist. Zeigen Sie:

(a) Die Länge $L(c)$ ist gegeben durch:

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\, di\varphi\,.$$

(b) Die Krümmung ist gegeben durch:

$$\kappa = \kappa(\varphi) = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}\,.$$

1-4 Berechnen Sie die Länge und Krümmung der logarithmischen Spirale

$$c : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) = a\exp(-bt)\,(\cos t, \sin t)\,.$$

1-5 Man lasse auf der Außenseite eines gegebenen festen Kreises mit Mittelpunkt M und Radius a einen weiteren Kreis mit Mittelpunkt M' und dem gleichen Radius abrollen. Betrachtet man dabei einen bestimmten Punkt c auf dem abrollenden Kreis, so beschreibt c eine Kardioide.

(a) Finden Sie die Kurve $c(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi))$, wobei φ der Rollwinkel ist und es gilt $M = (-a, 0)$, $M' = (a, 0)$, $c(0) = (0, 0)$.

(b) Zeigen Sie, dass φ der Polarwinkel um $(0, 0)$ und

$$r(\varphi) = 2a(1 - \cos\phi)$$

der Radius sind.

(c) Finden Sie die Länge und die Krümmung der Kardioide.

1-6 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Für jeden Punkt $z \in \mathbb{R}^2$ definieren wir den Gradient $\nabla f(z)$ von f in z als

$$\nabla f(z) = \begin{pmatrix} f_x(z) \\ f_y(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

und die Hesse-Bilinearform $\mathrm{d}^2 f(z) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von f in z als

$$\mathrm{d}^2 f(z)[u, v] = u^T \begin{pmatrix} f_{xx}(z) & f_{xy}(z) \\ f_{yx}(z) & f_{yy}(z) \end{pmatrix} v, \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^2.$$

Es sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben und man betrachte die Niveaumenge

$$f^{-1}(a) := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = a\big\}.$$

Man nehme an, dass a ein regulär Wert ist, nämlich, dass für alle $z \in f^{-1}(a)$ gilt $\nabla f(z) \neq 0$. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve, die in $f^{-1}(a)$ enthalten ist, d.h. $c(I) \subset f^{-1}(a)$. Für jede $t \in I$

(a) zeigen Sie, dass $c'(t)$ senkrecht zu $\nabla f(c(t))$ steht,

(b) schreiben Sie die Krümmung $\kappa(t)$ von c als Funktion von $\nabla f(c(t))$ und $\mathrm{d}^2 f(c(t))$.

1-7 Gegeben ist eine glatte Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ und die Kurve

$$c : I \to \mathbb{R}^2, \qquad c(t) = (t, h(t)).$$

Bestimmen Sie die Länge und die Krümmung der Kurve.

1-8 Es seien a, b positive Zahlen und betrachten Sie die Ellipse, Parabel und Hyperbel in Normalform:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad y = \frac{a}{2}x^2, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(a) Schreiben Sie Parametrisierungen für diese drei Kurven.

(b) Berechnen Sie die Krümmung der Kurven auf zwei Arten: mittels der Parametrisierung und mit Hilfe der Aufgabe 1-6.

(c) Was ist die Krümmung in den Scheitelpunkten?