

# Integrable Hamiltonsche Systeme und das KAM-Theorem

## Vortrag 6: Vollständige Integrabilität und die Hamilton-Jacobi-Gleichung

Paula Pilatus

21.01.2019

### 1 Vollständige Integrabilität

Dieser Abschnitt basiert auf [3].

**Definition 1.1.** Ein autonomes integrables System mit Hamilton-Funktion  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  und  $l$  Freiheitsgraden heißt *vollständig kanonisch integrabel*, wenn es eine kanonische Transformation zu neuen Koordinaten  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\chi}) \in \mathbb{R}^l \times T^l$

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\chi}), \quad \mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\chi})$$

gibt (wobei die Abhängigkeit von  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  in jeder Koordinate  $\chi_i$   $2\pi$ -periodisch ist), sodass die neue Hamilton-Funktion  $K$  nur von  $\mathbf{J}$  abhängt:

$$K = H(\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\chi}), \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\chi})) = K(\mathbf{J})$$

Solche Systeme haben  $l$  unabhängige Lösungen, die Poisson-kommutieren und der Phasenraum ist geblättert in invariante Tori. Mit den kanonischen Gleichungen folgen die Bewegungsgleichung:

$$\dot{\mathbf{J}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\chi}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{J}} := \boldsymbol{\omega}. \quad (1)$$

Im Folgenden soll der triviale Fall  $\omega = \mathbf{0}$  ausgenommen werden.

Für  $l = 1$  sind alle Bewegungen periodisch, im Fall  $l \geq 2$  sind die Bewegungen nicht notwendigerweise periodisch.

Zur besseren Anschaulichkeit soll zunächst der Fall  $l = 2$  betrachtet werden. Die Lösungen von Gl. 1 sind von der Form

$$\chi_1(t) = \chi_1(0) + \omega_1 t, \quad \chi_2(t) = \chi_2(0) + \omega_2 t.$$

Für die Orbits folgt:

$$\omega_1(\chi_1 - \chi_1(0)) - \omega_2(\chi_2 - \chi_2(0)) = 0.$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass

$$\chi_1(0) = 0 = \chi_2(0).$$

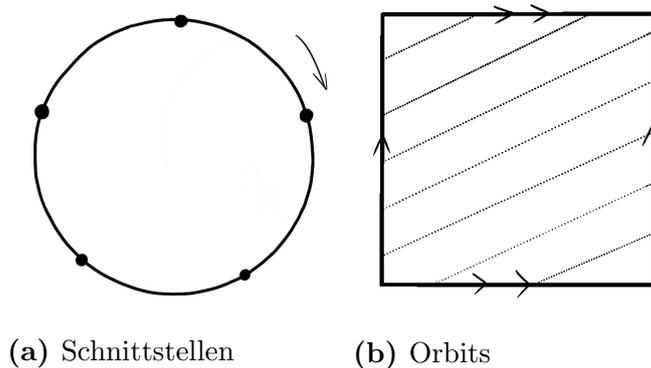
Der 2-Torus  $T^2$  kann verstanden werden als  $T^2 = \mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$ , unter der Identifikation  $[\chi] = [\chi + 2\pi\mathbf{m}]$ ,  $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2$ . Damit lässt sich  $T^2$  durch ein Quadrat darstellen, in dem die gegenüberliegenden Seiten miteinander identifiziert werden.

Für  $\omega_1 = 0$  sind die Orbits klarerweise periodisch. Für  $\omega_1 \neq 0$  betrachte die Schnitte des Orbits mit der  $\chi_2$ -Achse. Diese sind gegeben durch

$$\{(n\bar{\omega}) \bmod 2\pi\}_{n=0}^{\infty}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

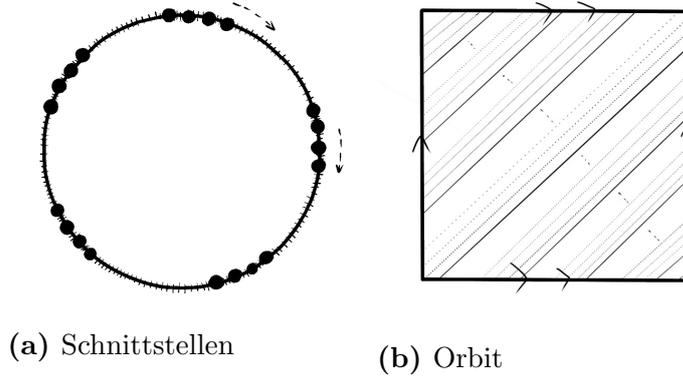
das entspricht gerade einer Drehung im  $T^1$  um  $\bar{\omega}$ . Es ergeben sich 2 Fälle:

- 1)  $\omega_1 = 0$  oder  $\frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{Q}$ . Wie in Abb. 1 skizziert ergeben sich periodische Orbits.



**Abb. 1:** Schnittstellen mit der  $\omega_2$ -Achse und Orbits auf dem Torus im Fall  $\omega_1 = 0$  oder  $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{Q}$

2)  $\omega_1 \neq 0$ ,  $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{Q}$ . Die Orbits liegen dicht in  $T^2$ . Dies ist in Abb. 2 zu sehen.



**Abb. 2:** Schnittstellen mit  $\omega_2$ -Achse und Orbit im Fall  $\omega_1 \neq 0$  und  $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{Q}$

Nun betrachten wir wieder den allgemeinen Fall  $l \geq 2$ . Auch hier sind die Lösungen gegeben durch

$$\boldsymbol{\chi}(t) = \boldsymbol{\chi}(0) + \boldsymbol{\omega}t. \quad (2)$$

Analog zu  $l = 2$ , kann  $T^l$  als  $l$ -dimensionaler Würfel aufgefasst werden, wobei die gegenüberliegenden Seiten miteinander identifiziert sind.

**Definition 1.2.** Sei  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^l$ .  $M_{\boldsymbol{\omega}} := \{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^l \mid \mathbf{m}\boldsymbol{\omega} = 0\}$  heißt *Resonanzmodul* zum Frequenzvektor  $\boldsymbol{\omega}$ . Die Dimension von  $M_{\boldsymbol{\omega}}$  (Menge der linear unabhängigen Resonanzrelationen  $\mathbf{m}\boldsymbol{\omega} = 0$ ) heißt *Resonanzvielfachheit*.

Es gilt  $0 \leq \dim M_{\boldsymbol{\omega}} \leq l - 1$ .

**Satz 1.3.** *Es sei  $M_{\boldsymbol{\omega}}$  das zu  $\boldsymbol{\omega}$  in 2 gehörige Resonanzmodul,  $d = \dim M_{\boldsymbol{\omega}}$ . Dann liegt der Orbit dicht in einem in  $T^l$  eingebetteten Torus der Dimension  $l - d$ . Der Orbit ist genau dann periodisch, wenn  $\dim M_{\boldsymbol{\omega}} = l - 1$ , man spricht in diesem Fall von vollständiger Resonanz. Andernfalls heißen die Bewegungen quasiperiodisch, der Spezialfall  $\dim M_{\boldsymbol{\omega}} = 0$  heißt unresonant.*

Um Satz 1.3 zu beweisen, betrachten wir zunächst invertierbare lineare orientierbare Koordinatentransformationen auf  $T^l$ . Diese sind von der Form

$$\boldsymbol{\chi}' = M\boldsymbol{\chi}, \quad M \in \text{SL}(l, \mathbb{Z}).$$

Die Bewegungsgleichungen transformieren entsprechend

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}' = M\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'.$$

**Lemma 1.4.** *Es existiert eine Koordinatentransformation von  $T^l$ , sodass  $\omega'_{l-d-1} = \dots = \omega'_l = 0$ , wobei  $d = \dim M_\omega$ .*

*Beweisidee.* Starte mit einer Basis  $(\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_d)$  von  $M_\omega$  und vervollständige mit  $l-d$  linear unabhängigen Vektoren  $(\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_{l-d})$  des  $\mathbb{Z}^l$ , sodass  $(\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_{l-d}, \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_d)$  eine Basis des  $\mathbb{Z}^l$ , d.h.  $(\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_{l-d}, \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_d)$  spannen ein Spatvolumen von 1 auf. Die Zeilen der gesuchten Transformationsmatrix entsprechen gerade den Vektoren  $(\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_{l-d}, \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_d)$ . In der Tat folgt dann  $\omega'_{l-d+j} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m} = 0$  für alle  $j = 1, \dots, d$ .  $\square$

**Beispiel 1.5.** Betrachte ein System von 3 unabhängigen harmonischen Oszillatoren. Die Hamilton-Funktion in den Koordinaten  $(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{J})$  ist gegeben durch

$$K(\mathbf{J}) = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \omega_3 + J_3.$$

Angenommen die Frequenzen erfüllen die Resonanzbedingungen

$$\omega_1 + 2\omega_2 - 4\omega_3 = 0, \quad \omega_1 - \omega_2 = 0.$$

Dann folgt  $\dim M_\omega = 2$  und  $\mathbf{m}_1 = (1, 2, -4)$ ,  $\mathbf{m}_2 = (1, -1, 0)$  ist eine Basis von  $M_\omega$ . Anwenden der kanonischen Transformation  $\tilde{\mathbf{J}} = (M^T)^{-1} \mathbf{J}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\chi}} = M \boldsymbol{\chi}$  mit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}(3, \mathbb{Z})$$

führt auf

$$\tilde{K}(\tilde{\mathbf{J}}) = \tilde{\mathbf{J}} M \boldsymbol{\omega} = (\omega_3 - \omega_2) \tilde{J}_3.$$

Damit haben wir

$$\tilde{\omega}_1 = 0 = \tilde{\omega}_2, \quad \tilde{\omega}_3 = \omega_3 - \omega_2.$$

**Definition 1.6.** Eine stetige Funktion  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *quasiperiodisch*, falls es eine stetige Funktion  $f : T^l \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^l$  gibt, sodass  $\phi(t) = f(\omega_1 t, \dots, \omega_l t)$ . Das *Zeitmittel*  $\langle \phi \rangle_T$  einer quasiperiodischen Funktion ist gegeben durch

$$\langle \phi \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\omega_1 t, \dots, \omega_l t) dt,$$

falls der Grenzwert existiert.

**Beispiel 1.7.** Die Koordinaten  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  eines vollständigen separablen Hamiltonschen Systems sind quasiperiodische Funktionen.

**Definition 1.8.** Sei  $f$  eine stetige Funktion auf dem  $T^l$ . Das *Phasenmittel* ist gegeben durch

$$\langle F \rangle = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_{T^l} f(\boldsymbol{\chi}) d\boldsymbol{\chi}.$$

**Satz 1.9.** Sei  $f : T^l \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Betrachte die quasiperiodische Funktion, erzeugt durch Verknüpfen von  $f$  mit dem Fluss  $\phi(t) = f(\boldsymbol{\chi}(0) + \boldsymbol{\omega}t)$ . Wenn die Frequenzen  $\boldsymbol{\omega}$  unresonant sind ( $\dim M_{\boldsymbol{\omega}} = 0$ ), dann existiert das Zeitmittel  $\langle \phi \rangle_T(\boldsymbol{\chi}(0))$  überall, ist konstant auf  $T^l$  und stimmt mit dem Phasenmittel von  $f$  überein.

*Beweis.* Betrachte zunächst den Spezialfall eines trigonometrischen Polynoms

$$f(\boldsymbol{\chi}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{F}} \hat{f}_{\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\chi}},$$

mit  $\mathcal{F} \subset \mathbb{Z}^l$  endlich. Falls  $\mathcal{F} = \{\mathbf{m}\}$ , dann folgt für  $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ , dass  $f$  konstant ist, damit

$$\langle \phi \rangle_T = f_0 = \langle f \rangle.$$

Für  $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$  folgt  $\langle f \rangle = 0$  und

$$\begin{aligned} \langle \phi \rangle_T &= e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\chi}(0)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}t} dt \\ &= \frac{e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\chi}(0)}}{i\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{i\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}T} - 1}{T} \\ &= 0. \end{aligned}$$

für alle  $\boldsymbol{\chi}(0) \in T^l$ , wobei in der Umformung von Zeile 1 nach Zeile 2 verwendet wurde, dass  $\mathbf{m}\boldsymbol{\omega} \neq 0$ , da  $\dim M_{\boldsymbol{\omega}} = 0$ . Für  $\mathcal{F}$  endlich folgt die Aussage mit Linearität von  $\langle \cdot \rangle$  und  $\langle \cdot \rangle_T$ . Um den allgemeinen Fall zu zeigen, verwende, dass jede stetige Funktion  $f : T^l \rightarrow \mathbb{R}$  gleichmäßig durch ein trigonometrisches Polynom auf  $T^l$  approximiert werden kann.  $\square$

*Beweis von Satz 1.3.* Der Fall  $\dim M_{\boldsymbol{\omega}} = l - 1$  ist klar. Sei zunächst  $\dim M_{\boldsymbol{\omega}} = 0$ . Angenommen es gibt ein  $\bar{\boldsymbol{\chi}} \in T^l$  und eine offene Umgebung  $U$  von  $\bar{\boldsymbol{\chi}}$ , die der Orbit nicht schneidet. Dann konstruiere  $f : T^l \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit den Eigenschaften

a)  $\langle f \rangle = 1$

b)  $f(\boldsymbol{\chi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\chi} \notin U$ .

Dann ist das Zeitmittel  $\neq 0$ , im Widerspruch zu Satz 1.9. Im Fall  $0 < d < l - 1$ ,  $d = \dim M_\omega$  existieren nach Lemma 1.4 Koordinaten, sodass  $\omega_{l-d+1} = \dots = \omega_l = 0$ . Damit können wir uns auf den Torus  $T^{l-d}$ , gegeben durch  $(\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_{l-d}, \boldsymbol{\chi}_{l-d+1}(0), \dots, \boldsymbol{\chi}_l(0))$  beschränken und dort obiges Argument wiederholen.  $\square$

## 2 Die Hamilton-Jacobi-Methode

Dieser Abschnitt beruht auf [1].

### 2.1 Erzeugende Funktionen

Zur Erinnerung soll der Begriff der erzeugenden Funktion aus Vortrag 3 kurz wiederholt werden. Es seien  $\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ,  $\mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$   $2n$  Funktionen in  $2n$  Variablen  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ , die eine kanonische Transformation  $g$  bestimmen. Damit ist die 1-Form  $\mathbf{p}d\mathbf{q} + \mathbf{Q}d\mathbf{P}$  exakt. Setze

$$\mathbf{p}d\mathbf{q} + \mathbf{Q}d\mathbf{P} = dS(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \quad (3)$$

Angenommen, es existiert ein Punkt  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$  mit

$$\det \left. \frac{\partial(\mathbf{P}, \mathbf{q})}{\partial(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \right|_{(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)} = \det \left. \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)} \neq 0,$$

Das heißt  $(\mathbf{P}, \mathbf{q})$  können als unabhängige Koordinaten angenommen werden. Dann heißt die kanonische Transformation *frei* und  $S$  kann lokal in  $(\mathbf{P}, \mathbf{q})$  ausgedrückt werden:

$$S(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = S_1(\mathbf{P}, \mathbf{q}).$$

$S_1$  heißt *erzeugende Funktion* der kanonischen Transformation  $g$ .

**Bemerkung 2.1.**  $S_1$  ist keine Funktion auf dem Phasenraum  $\mathbb{R}^{2n}$ , sondern auf einer Umgebung im  $\mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_P^n$ .

Nach Gl.3 gilt:

$$\frac{\partial S_1(\mathbf{P}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{p}, \quad \frac{\partial S_1(\mathbf{P}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{Q}. \quad (4)$$

Umgekehrt gibt jede Funktion  $S_1$  eine kanonische Transformation nach Gl.4.

Im dritten Vortrag wurde folgender Satz bewiesen:

**Satz 2.2.** Sei  $S_1(\mathbf{P}, \mathbf{q})$  eine Funktion auf einer Umgebung eines Punktes  $(\mathbf{P}_0, \mathbf{q}_0)$  zweier  $n$ -dimensionaler euklidischer Räume. Wenn gilt

$$\det \left( \frac{\partial^2 S_1}{\partial \mathbf{P} \partial \mathbf{q}} \Big|_{(\mathbf{P}_0, \mathbf{q}_0)} \right) \neq 0,$$

dann ist  $S_1$  erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation.

## 2.2 Die Hamilton-Jacobi-Gleichung

**Motivation:** Für  $H = K(\mathbf{P})$  sind die kanonischen Gleichungen

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad (5)$$

von der Form

$$\dot{\mathbf{P}} = 0, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}} \implies \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0), \quad \mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}(0) + t \frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}} \Big|_{\mathbf{Q}(0)}. \quad (6)$$

**Ziel:** Finde kanonische Transformation  $g$ , die  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  zu  $K(\mathbf{P})$  reduziert.

Nach Gl. 4 ergibt sich als Bedingung an die erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{P}) &= H \circ g^{-1}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = H(\mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}), \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}), t) \\ &= H \left( \frac{\partial S(\mathbf{P}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}, t \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Wobei nach dem differenzieren  $\mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  zu substituieren ist. Für feste  $\mathbf{P}$  heißt die Gl. 7 *Hamilton-Jacobi-Gleichung*. Eine Lösung von Gl. 7 in Abhängigkeit von  $n$  Parametern  $P_i$  heißt vollständiges Integral der Lösung.

Betrachte nun umgekehrt eine kanonische Transformation mit erzeugender Funktion  $S(\mathbf{P}, \mathbf{q})$ , die die Hamilton-Jacobi-Gleichung löst. Dann gilt

$$\mathbf{p} = \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \right) (\mathbf{P}, \mathbf{q}), \quad (8)$$

woraus  $\mathbf{P}$  bestimmt wird. Ausdrücken von  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  in den neuen Koordinaten  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  führt auf

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{P}, \mathbf{q}), \mathbf{q} \right).$$

Mit Gl. 7 folgt

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = K(\mathbf{P}).$$

Damit sind die kanonischen Gleichungen von der Form in Gl. 6 und können durch explizites integrieren gelöst werden. Es folgt:

**Satz 2.3** (Satz von Jacobi). *Ist eine Lösung  $S(\mathbf{P}, \mathbf{q})$  der Hamilton-Jacobi-Gleichung in Abhängigkeit von  $n$  Parametern  $P_i$  gegeben, sodass  $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{P} \partial \mathbf{q}}\right) \neq 0$ , dann können die kanonischen Gleichungen durch explizite Integralausdrücke gelöst werden. Die Funktionen  $\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  bestimmt durch Gl. 8 sind erste Integrale der Gl. 5.*

**Bemerkung 2.4.** Eine *lokale* Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung kann immer gefunden werden. Die eigentliche Herausforderung besteht darin, eine *globale* Lösung zu finden.

### 3 Vollständige Separabilität

**Definition 3.1.** In der Gleichung

$$\Phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; q_1, \dots, q_n\right) = 0$$

heißt die Variable  $q_1$  *separabel*, wenn  $q_1$  und die Ableitung  $\frac{\partial S}{\partial q_1}$  nur in der Form  $\varphi\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1\right)$  auftreten.

In dem Fall, dass  $q_1$  separabel ist, suche nach einer Lösung von der Form

$$S = S_1(q_1) + S'(q_2, \dots, q_n).$$

Setze  $\varphi\left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}, q_1\right) = c_1$  und erhalte die Gleichung

$$\Phi_2\left(\frac{\partial S'}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_n}, q_2, \dots, q_n; c_1\right) = 0$$

für  $S'$ . Sei  $S' = S'(q_2, \dots, q_n; c_1, \dots, c_n)$  eine Familie von Lösungen von  $\Phi_2 = 0$  in Abhängigkeit von den Parametern  $c_i$ . Dann erfüllt  $S_1(q_1, c_1) + S'$  die Gleichung  $\Phi_1 = 0$ , wenn  $S_1$  erfüllt

$$\varphi\left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}, q_1\right) = c_1.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist aber gerade gegeben durch

$$S_1(q_1) = \int^{q_1} \psi(\tilde{q}_1, c_1) d\tilde{q}_1,$$

mit

$$\psi(q_1, c_1) = \frac{\partial S}{\partial q_1}(q_1, c_1).$$

bestimmt durch Invertieren von  $p \mapsto \varphi(p, q)$ .

Falls  $q_2$  separabel ist in der Gleichung  $\Phi_2 = 0$ , wiederhole das Vorgehen, usw. Falls schließlich gilt

$$S = S_1(q_1; c_1) + S_2(q_2; c_1, c_2) + \dots + S_n(q_n; c_1, \dots, c_n),$$

heißen die Variablen *vollständig separabel*.

## 4 Anwendungsbeispiel: Das Zwei-Zenter-Problem

Als Anwendungsbeispiel der eingeführten Konzepte soll das Zwei-Zenter-Problem betrachtet werden, dargestellt in Abb 3. Zur Beschreibung eignen sich die sog. *elliptischen*

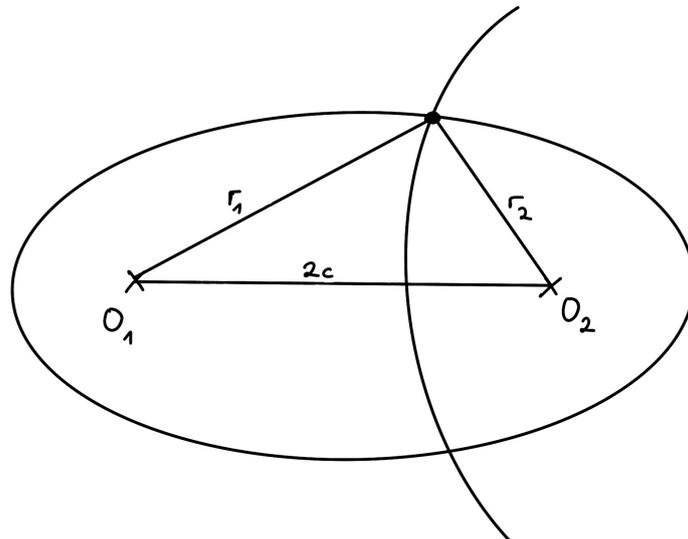


Abb. 3: Das Zwei-Zenter-Problem

*Koordinaten:*

$$\xi = r_1 + r_2, \quad \eta = r_1 - r_2$$

Die Linien mit  $\xi = \text{const}$  sind gegeben durch Ellipsen mit den Foki  $O_1, O_2$ , die Linien mit  $\eta = \text{const}$ . sind Hyperbeln mit den selben Foki. Einsetzen in die Hamilton-Funktion liefert:

$$H = 2p_\xi^2 \frac{\xi^2 - 4c^2}{\xi^2 - \eta^2} + 2p_\eta^2 \frac{4c^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} - \frac{4k\xi}{\xi^2 - \eta^2}.$$

Für die Hamilton-Jacobi-Gleichung ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 (\xi^2 - 4c^2) + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 (4c^2 - \eta^2) = K(\xi^2 - \eta^2) + 4k\xi.$$

Separiere die Variablen durch:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 (\xi^2 - 4c^2) - 4k\xi - K\xi^2 = c_1 \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 (4c^2 - \eta^2) + K\eta^2 = -c_1. \quad (10)$$

Als vollständiges Integral erhalten wir:

$$S(\xi, \eta; c_1, c_2) = \int \sqrt{\frac{c_1 + c_2 \tilde{\xi}^2 + 4k\tilde{\xi}}{\tilde{\xi}^2 - 4c^2}} d\tilde{\xi} + \int \sqrt{\frac{-c_1 - c_2 \tilde{\eta}^2}{4c^2 - \tilde{\eta}^2}} d\tilde{\eta}.$$

Und mit dem Satz von Jacobi erhalten wir Lösungen durch Integralausdrücke für verschiedene Werte von  $c_1, c_2$ .

Zur Untersuchung möglicher Orbits sind verschiedene Grundüberlegungen anzustellen. Zunächst folgt direkt aus der Definition von  $\xi$  und  $\eta$ , dass

$$\xi \geq 2c \geq \eta \geq -2c. \quad (11)$$

Zudem betrachte nach Gl. 5

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\xi} = 4p_\xi \frac{\xi^2 - 4c^2}{\xi^2 - \eta^2}.$$

Umparametrisieren entsprechend

$$dt = (\xi^2 - \eta^2) d\tau$$

liefert

$$\frac{d\xi}{d\tau} = 4p_\xi (\xi^2 - 4c^2). \quad (12)$$

Gl. 9 kann auch als Erhaltungssatz interpretiert werden. Einsetzen von Gl. 12 und Umformen liefert

$$0 \leq \left( \frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 = 16 (c_1 + 4k\xi + K\xi^2) (\xi^2 - 4c^2) =: F_1(\xi, c_1, K).$$

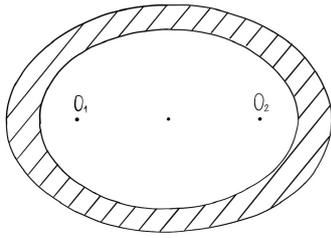
Völlig analog und mit Hilfe von Gl. 10 erhalten wir ein Polynom  $F_2(\eta, c_1, K)$ , welches ebenfalls nicht-negativ sein darf, für alle physikalisch relevanten Lösungen. Es sind also immer Lösungen zwischen zwei Nullstellen von  $F_1$  und  $F_2$  zu betrachten, welche der GL. 11 genügen.

Zudem bemerken wir, dass die Bewegung doppelt-periodisch ist. Liegt eine doppelte Nullstelle vor, geht die Periodendauer gegen unendlich, es kommt zu einer sog. *Limitationsbewegung*.

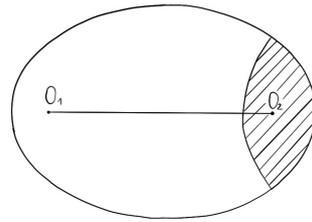
Charlier unterscheidet in [2] folgende Fälle:

- 1)  $K < 0$
- 2)  $K > 0$
- 3)  $K = 0$
- 4) Limitationsbewegung
- 5) rein periodische Bewegung

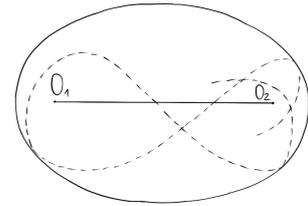
Wobei für 1) und 2)  $F_1$  und  $F_2$  mit einfachen Nullstellen angenommen werden. Die Bedingung an einen Orbit um rein periodisch zu sein folgt wie in Abschnitt 1. Jeder der Fälle 1) - 5) zerfällt wiederum in eine Vielzahl von Unterfällen. Mögliche Orbits sind in Abb 4 dargestellt.



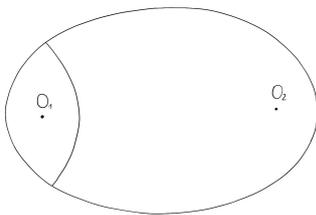
(a) Planetenbewegung, möglich für Fall 1



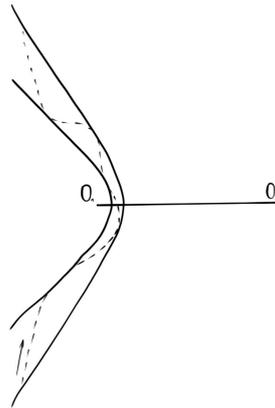
(b) Satellitenbewegung, möglich für den Fall 1



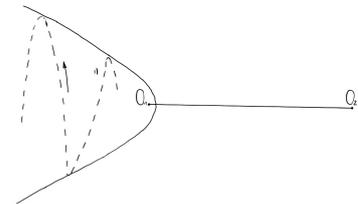
(c) Lemniskatenbewegung, möglich für den Fall 1



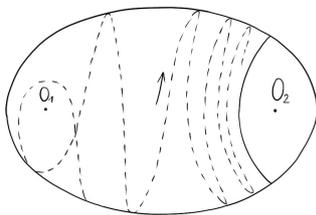
(d) Hyperbolische Bewegung, möglich für den Fall 5



(e) Hyperbolische Sinus-soidbewegung, möglich für die Fälle 2 und 3



(f) Divergierende Pendelbewegung, möglich für den Fall 2



(g) Konvergierende Pendelbewegung, möglich für den Fall 4

Abb. 4: Beispiele möglicher Bahnformen, nach [2].

## Referenzen

[1] VI Arnold. Mathematical methods of classical mechanics, 1997, 1989.

- [2] Carl Vilhelm Ludwig Charlier. *Die Mechanik des Himmels: Vorlesungen*, volume 1. Veit, 1902.
- [3] Antonio Fasano and Stefano Marmi. *Analytical mechanics: an introduction*. OUP Oxford, 2006.