Vortrag 3: Montag, 14. Januar, 2019

Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten und erzeugende Funktionen

Valentin Schmid

Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten

Für eine gegebene symplektische Mannigfaltigkeit M und Untermannigfaltigkeit X mit Einbettung $i\colon X \hookrightarrow M$ kann die Einbettung auch als Inklusion betrachtet werden, sodass der Tangentialraum der Untermannigfaltigkeit X an einem beliebigen Punkt Untervektorraum des Tangentialraums der Mannigfaltigkeit M an diesem Punkt wird. Daher ist es uns möglich, die uns bereits bekannten Definitionen von Untervektorräumen eines symplektischen Vektorraums auf symplektische Mannigfaltigkeiten und deren Tangentialräume anzuwenden.

Definition 1. Sei (M, ω) eine $2n$-dimensionale symplektische Mannigfaltigkeit. Eine Untermannigfaltigkeit Y von M heißt *Lagrangesche Untermannigfaltigkeit*, wenn T_pY ein Lagrangescher Untervektorraum von T_pM an jedem Punkt $p \in Y$ ist.

Example 2 (Null-Schnitt)**.** Wir werden zeigen, dass der Null-Schnitt des Kotangentialbündels einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit ist. Sei dafür X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Kotangentialündel $M = T^*X$. Für lokale Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ auf einer Karte $U \subseteq X$, mit assoziierten kotangtialen Koordinaten $x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots \xi_2$ auf T^*U war die tautologische 1-form auf T^*X definiert als

$$\alpha = (\mathrm{d}\pi)^*\xi = \sum \xi_i \,\mathrm{d}x^i,$$

wobei π die Projektion $\pi\colon M \longrightarrow X$ bezeichnet. Dann ist die kanonische 2-form auf T^*X als

$$\omega = \mathrm{d}\alpha = \sum \mathrm{d}\xi^i \wedge \mathrm{d}x^i \text{ definiert.}$$

Der Null-Schnitt ist gegeben als

$$X_0 = \{(x, \xi) \in T^*X | \xi = 0 \text{ in } T^*_xX\} \subseteq T^*X,$$

und wir werden mit $i_0\colon X_0 \hookrightarrow T^*X$ die Inklusionsabbildung bezeichnen.
Man sieht direkt, dass die tautologische 1-Form auf dem Schnitt der Mengen X_0 mit T^*U verschwindet, da alle ξ_i null sind. Wir folgern, dass

$$i_0^*\omega = i_0^* \,\mathrm{d}\alpha = 0.$$

Man könnte allgemeiner fragen, wann Schnitte in T^*X Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten sind. Dazu ist es hilfreich zu erkennen, dass solche Schnitte gerade die Graphen von 1-Formen in $\Omega^1(X)$ sind. Diese werden im nächsten Beispiel behandelt.

Example 3 (Graph einer 1-Form)**.** Für eine gegebene de Rham 1- Form $\mu \in \Omega^1(X, \mathbb{R})$ hat der Graph von μ die Form

$$X_\mu = \{(x, \mu_x) | x \in X, \mu_x \in T_x^*X\}.$$

Sei $s_\mu\colon X \longrightarrow T^*X, x \mapsto (x, \mu_x)$ der μ-Schnitt induziert von der 1- Form μ. Das Bild von s_μ ist gerade X_μ. Wenn α die tautologische 1- Form auf T^*X bezeichnet, erhalten wir

$$s_\mu^*\alpha = \mu.$$

Sei dafür α wie im letzten Vortrag $\alpha_p = (\mathrm{d}\pi_p)^*\xi \in T_p^*(T^*X)$ an eine Punkt $p = (x, \xi) \in T^*X$. Für $p = s_\mu(x) = (x, \mu_x)$ erhalten wir $\alpha_p = (\mathrm{d}\pi_p)^*\mu_x$. Dann

$$(s_\mu^*\alpha)_x = (\mathrm{d}s_\mu)_x^*\alpha_p = (\mathrm{d}s_\mu)_x^*(\mathrm{d}\pi_p)^*\mu_x = (\mathrm{d}(\pi \circ s_\mu))_x^*\mu = \mu_x.$$

Damit können wir zeigen, dass es sich bei X_μ um eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit von T^*X handelt, genau dann wenn μ geschlossen ist.
Betrachten wir dafür $s_\mu\colon X \longrightarrow T^*X$ mit Bild X_μ. Nach der Definition von Einbettungen existiert ein Diffeomorphismus $\tau\colon X \longrightarrow X_\mu$, $\tau(x) = (x, \mu_x)$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "s_\mu"] \arrow[dr, "\tau"'] & & T^*X \\
& X_\mu \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei i die Inklusionsabbildung $i\colon X_\mu \hookrightarrow T^*X$ ist. Es ist daher X_μ eine Lagragesche Untermannigfaltigkeit (nach dem kommutativen Diagramm), wenn $i^* \,\mathrm{d}\alpha = 0$ und damit wenn

$$\begin{aligned}
i^* \,\mathrm{d}\alpha = 0 &\Leftrightarrow \tau^* \, i^* \,\mathrm{d}\alpha = 0 \Leftrightarrow (i \circ \tau)^* \,\mathrm{d}\alpha = 0 \\
&\Leftrightarrow s_\mu^* \,\mathrm{d}\alpha = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}s_\mu^*\alpha = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow \mu \text{ ist geschlossen.}
\end{aligned}$$

Assoziierte kanonische Transformationen

Diese Überlegungen zu Lagrangeschen Untermannigfaltigkeiten haben Anwendungen auf Symplektomorphismen und daher auch eine Anwendung in der klassischen Mechanik, wenn man den Phasenraum als symplektische Mannigfaltigkeit und die Symplektomorphismen als kanonische Transformationen betrachtet. Betrachten wir $2n$-dimensionale symplektische Mannigfaltigkeiten (M_1, ω_1) und (M_2, ω_2) und einen Diffeomorphismus $\varphi\colon M_1 \longrightarrow M_2$ zwischen diesen beiden Mannigfaltigkeiten. Dann können wir zeigen, dass die Abbildung φ genau dann ein Symplektomorphismus ist, wenn der Graph von φ eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit der Produktmannigfaltigkeit $(M_1 \times M_2, \tilde{\omega})$ zusammen mit der so genannten getwisteten Produktform $\tilde{\omega}$ ist.
Sei dafür $M_1 \times M_2$ wir oben, zusammen mit den Projektionsabbildungen

$$
\begin{array}{ccccc}
(p_1, p_2) & & M_1 \times M_2 & & (p_1, p_2) \\
\big\downarrow & \swarrow^{\pi_1} & & \searrow^{\pi_2} & \big\downarrow \\
p_1 & M_1 & & M_2 & p_2
\end{array}
$$

Man sieht direkt, dass $\tilde{\omega} = (\pi_1)^*\omega_1 - (\pi_2)^*\omega_2$ eine geschlossene symplektische 2-Form auf $M_1 \times M_2$ definiert. Der Graph des Diffeomorphismus φ ist gegeben durch

$$\Gamma_\varphi = \{(p, \varphi(p)) | p \in M_1\}.$$

Es definiert eine $2n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M_1 \times M_2$. Wir bezeichnen mit $\gamma\colon M_1 \longrightarrow M_1 \times M_2$ die induzierte Einbettung, welche M_1 auf Γ_φ abbildet, via

$$
\begin{aligned}
\gamma\colon M_1 &\longrightarrow M_1 \times M_2 \\
p &\longmapsto (p, \varphi(p)).
\end{aligned}
$$

Nun ist Γ_φ genau dann Lagrangesche, wenn $\gamma^*\tilde{\omega} = 0$ und daher, wenn

$$
\begin{aligned}
\gamma^*\tilde{\omega} &= \gamma^*\pi_1^*\omega_1 - \gamma^*\pi_2^*\omega_2 \\
&= (\pi_1 \circ \gamma)^*\omega_1 - (\pi_2 \circ \gamma)^*\omega_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Aber $\pi_1 \circ \gamma$ ist die Identität, da γ das erste Argument auf sich selbst abbildet, und $\pi_2 \circ \gamma = \varphi$. Daher gilt

$$\gamma^*\tilde{\omega} = 0 \Longleftrightarrow \varphi^*\omega_2 = \omega_1.$$

Dies ist die Definition eines Symplektomorphismus. In anderen Worten haben wir gezeigt, dass ein Diffeomorphismus φ genau dann ein Symplektomorphismus oder eine kanonische Transformation ist, wenn Γ_φ eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit von $(M_1 \times M_2, \tilde{\omega})$ ist.

Example 4 (Faserweise Translation und Lift eines Diffeomorphismus)**.** Im folgenden werden wir noch eine alternative Herleitung des Resultats in Beispiel 3 besprechen.

Sei dazu μ eine 1-Form $\mu \in \Omega^1(X)$. Wir definieren die Translation faserweise durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau_\mu \colon T^*X &\longrightarrow T^*X \\ (q,p) &\longmapsto (q, p + \mu_q). \end{aligned}$$

In lokalen Koordinaten ergibt sich, dass

$$\tau_\mu^*(p_i \,\mathrm{d}q^i) = p_i \,\mathrm{d}q^i + \pi^* \mu_q,$$

wobei $\pi \colon T^*X \longrightarrow X$. Dann gilt, dass $\tau_\mu^*(\omega) = \omega + \pi^* \,\mathrm{d}\mu$. Somit ist τ_μ ein Symplektomorphismus, wenn μ eine geschlossene 1-Form ist. Wir können unter anderem auch direkt sehen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota_\mu \colon X &\longrightarrow T^*X \\ q &\longmapsto (q, \mu_q) \end{aligned}$$

genau dann eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit definiert, wenn μ geschlossen ist.
Ein weiterer interessanter Symplektomorphismus ist der Lift eines Diffeomorphismus. Betrachten wir dazu die Abbildung $u \colon X_1 \longrightarrow X_2$, $q \mapsto u(q)$. Dann induziert u eine natürlichen Diffeomorphismus, den *Lift* von u durch

$$\begin{aligned} u_\sharp \colon M_1 &\longrightarrow M_2 \\ (q,\xi) &\longmapsto (u(q), ((\mathrm{d}_q u)^{-1})^* \xi) = (u(q), \xi \circ (\mathrm{d}_q u)^{-1}). \end{aligned}$$

Man kann nachrechnen, dass es sich hierbei wirklich um einen Diffeomorphismus handelt. Die für uns interessantere Eigenschaft ist jedoch, dass $(u_\sharp)^*$ tautologische 1-Formen auf tautologische 1-Formen abbildet. Um dies einzusehen, benutzen wir die beiden Projektionsabbildungen $\pi_1 \colon M_1 \longrightarrow X_1$ und $\pi_2 \colon M_2 \longrightarrow X_2$ zusammen mit der punktweisen Definition von tautologischen 1-Formen $(\alpha_1)_{p_1} = (\mathrm{d}\pi_1)^*_{p_1} \xi_1$ und $(\alpha_2)_{p_2} = (\mathrm{d}\pi_2)^*_{p_2} \xi_2$ für zwei Punkte $p_1 = (q_1, \xi_1) \in M_1$ und $p_2 = (q_2, \xi_2) \in M_2$. Es ist zu zeigen, dass $(u_\sharp)^* \alpha_2 = \alpha_1$, oder Punktweise

$$(\mathrm{d}u_\sharp)^*_{p_1} (\alpha_2)_{p_2} = (\alpha_1)_{p_1}.$$

Für Ersteres gilt jedoch

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}u_\sharp)^*_{p_1} (\alpha_2)_{p_2} =& (\mathrm{d}(\pi_2 \circ u_\sharp))^*_{p_1} \xi_2 \\ =& (\mathrm{d}(u \circ \pi_1))^*_{p_1} \xi_2 = (\mathrm{d}\pi_1)^*_{p_1} \xi_1 = (\alpha_1)_{p_1}. \end{aligned}$$

Wir haben somit gezeigt, dass ein Diffeomorphismus zwischen Mannigfaltigkeiten einen Symplektomorphismus zwischen den Kotangentialbündeln induziert.
Die Verknüpfung dieser beiden Symplektomorphismen ergibt nun den Symplektomorphismus

$$\begin{aligned} u_\mu \colon M_1 &\longrightarrow M_2 \\ (q,\xi) &\longmapsto (u(q), (\xi + \mu_q)(d_q u)^{-1}). \end{aligned}$$

Example 5 (Clifford Torus)**.** Der Torus ist definiert durch die Quotientenabbildung $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} (\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}) \cong \mathbb{T}^n$. Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$ definieren auch eine Basis von 1-Formen $(\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^n)$ des Kotangentialraums für jeden Punkt in $\mathbb{T}^n$. Es gilt daher, dass der Torus ein triviales Kotangentialbündel besitzt $T^*\mathbb{T}^n \cong \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ und jede 1-Form geschrieben werden kann als $\alpha = \alpha_i\,\mathrm{d}x^i$, wobei die α_i als 2π-periodische Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ definiert sind.
Um nun Lagrangesche Tori als Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{2n}$ zu finden, betrachten wir zunächst wieder Koordinaten $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ und Koordinaten $(\theta_1, \ldots, \theta_n, I_1, \ldots, I_n) \in (\mathbb{T}^n \times (0, \infty)^n) \subset T^*\mathbb{T}^n$. Nun ist die kanonische 2-Form definiert als $\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$ und wir definieren weiterhin die primitive Form

$$\lambda = \frac{1}{2}(p_i\,\mathrm{d}q^i - q_i\,\mathrm{d}p^i).$$

Dann ist die Abbildung

$$u\colon\ \mathbb{T}^n \times (0, \infty)^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

gegeben durch

$$p_i = \sqrt{2 \cdot I_i}\cos\theta_i$$
$$q_i = \sqrt{2 \cdot I_i}\sin\theta_i,$$

ein Symplektomorphismus mit Bild $\{q_i^2 + p_i^2 > 0 \text{ für alle } i\}$, da $u^*(\lambda) = I_i\,\mathrm{d}\theta^i$ die tautologische 1-Form auf $T^*\mathbb{T}^n$ ist. Es folgt, dass der Torus als Graph einer eines Symplektomorphismus eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit ist. Wir wollen nun genauer die geschlossenen 1-Formen auf dem Torus untersuchen. Für den einfacheren Fall des $\mathbb{R}^n$ erhalten wir folgendes nützliches Resultat.

Lemma 6. *Jede geschlossene 1-Form $\beta = \beta_i\,\mathrm{d}x^i$ auf $\mathbb{R}^n$ ist exakt.*

Proof. Wir definieren $f(x) = \int_0^1 \beta_i(tx)x^i\,\mathrm{d}t$. Dann folgt $\beta = \mathrm{d}f$. □

Wir können mit Lemma 6 ein gleiches Resultat für den Torus herleiten.

Proposition 7. *Ist α eine geschlossene 1-Form auf $\mathbb{T}^n$ und $c_i \in \mathbb{R}^n$ das Integral $c_i = \int_0^1 \alpha_i(te_i)\,\mathrm{d}t$ von α entlang $\{(0, \ldots, t, \ldots, 0) | t \in [0, 1]\} = [0, 1] \cdot e_i$, dann existiert eine Funktion $g\colon \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, sodass $\alpha = c_i\,\mathrm{d}x^i + \mathrm{d}g$.*

Proof. Nach Lemma 6 existiert eine Funktion $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, sodass $\pi^*\alpha = \mathrm{d}\tilde{f}$. Es gilt $\tilde{f}(x + e_i) - \tilde{f}(x) = const$, denn

$$\mathrm{d}\tilde{f}(x + e_i) - \mathrm{d}\tilde{f}(x) = (\pi^*\alpha)(x + e_i) - (\pi^*\alpha)(x) = (\pi^*\alpha)(x) - (\pi^*\alpha)(x) = 0.$$

Wählen wir $x = 0$ und benutzen wir die Definition aus dem Beweis für Lemma 6, dann folgt

$$\tilde{f}(x + e_i) - \tilde{f}(x) = c_i.$$

Wir setzten $\tilde{g} = \tilde{f} - c_i x^i$ und erhalten

$$\tilde{g}(x + e_i) = \tilde{f}(x + e_i) - c_i - c_i x^i = c_i + \tilde{f}(x) - c_i - c_i x^i = \tilde{g}(x),$$

sodass bei Normierung von $\tilde{g}$ auf ein Periode von 2π wie gewünscht g entsteht. □

Erzeugende Funktionen (Generating functions)

Sei X_1 und X_2 zwei n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, $M_1 = T^*X_1$, $M_2 = T^*X_2$ das Kotangentialbündel und $f\colon X_1 \times X_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ eine $C^\infty(X_1 \times X_2)$ Funktion. Im nächsten Abschnitt werden wir folgende abkürzende Notationen benutzen

$$\begin{aligned} f_x &= (\mathrm{d}f)_{(x,y)} \text{ projeziert auf } T_x^*X_1 \times \{0\}, \\ f_y &= (\mathrm{d}f)_{(x,y)} \text{ projeziert auf } \{0\} \times T_y^*X_2. \end{aligned}$$

Damit ist $\mathrm{d}f$ eine geschlossene 1-Form auf $X_1 \times X_2$ und wir erhalten durch den Symplektomorphismus $(M_1 \times M_1, \tilde{\omega}) \longrightarrow (M_1 \times M_2, \omega_1 + \omega_2)$, $(x, \xi, y, -\eta) \mapsto (x, \xi, y, \eta)$ eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit

$$Y_f = \{(x, y, f_x, -f_y) \big| (x, y) \in X_1 \times X_2\},$$

von $(M_1 \times M_2, \tilde{\omega})$, welche auch *Lagrangesche Untermannigfaltigkeit erzeugt von f* genannt wird.
Wenn Y_f der Graph eines Diffeomorphismus $\varphi\colon M_1 \longrightarrow M_2$ ist, dann nennen wir φ einen *Symplektomorphismus erzeugt von f*, und weiter definieren wir f als die *erzeugende Funktion* von φ.
Die Frage wird also sein, ob Y_f tatsächlich der Graph eines Diffeomorphismus $\varphi\colon M_1 \longrightarrow M_2$ ist.
Seien dafür $(U_1, x_1, \dots, x_n)$, $(U_2, y_1, \dots, y_n)$ lokale Koordinaten von X_1 und X_2, mit assoziierten Karten $(T^*U_1, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ und $(T^*U_2, y_1, \dots, y_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$ für M_1 und M_2. Sei $(x, \xi) \in M_1$ und $(y, \eta) \in M_2$ mit

$$\varphi(x, \xi) = (y, \eta).$$

Das bedeutet, dass

$$\xi = f_x, \text{ and } \eta = -f_y \text{ ist.}$$

Wir erhalten folgende zu lösenden Gleichungen $\begin{cases} (1) \quad \xi_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) \\ (2) \quad \eta_i = -\dfrac{\partial f}{\partial y_i}(x, y). \end{cases}$

Nach dem Satz über implizite Funktionen ist (1) lokal für y in Abhängigkeit von x und ξ lösbar, wenn

$$\det \left[\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right]_{i,j=1}^n \neq 0.$$

Wenn wir die Lösung für (1) in die Gleichung (2) einsetzen, erhalten wir ein Lösung $\varphi(x, \xi)$. Y_f ist also lokal der Graph eines Diffeomorphismus wenn obige Determinante ungleich Null ist.

Wenn $X_1 = X_2 = \mathbb{R}^n$ ist, können wir auf eine andere Weise ein Symplektomorphismus durch die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ erzeugen. Diese Funktion wird von Bedeutung sein, wenn wir die Hamilton-Jacobi Gleichung lösen werden. Betrachte dafür die symplektische Abbildung $\varphi : (x,\xi) \mapsto (y,\eta)$ dargestellt durch

$$y = a(x,\xi) \tag{1}$$
$$\eta = b(x,\xi). \tag{2}$$

Wenn wir annehmen, dass

$$\det(a_x) \neq 0, \tag{3}$$

dann lässt sich (1) wieder lösen für $x = \alpha(y,\xi)$ und einsetzten dieser Gleichung in (2) führt zu folgender alternativen Darstellung der Abbildung φ :

$$x = \alpha(y,\xi), \tag{4}$$
$$\eta = \beta(y,\xi). \tag{5}$$

wobei $\beta(y,\xi) = b(\alpha(y,\xi),\xi)$ und

$$\det(\alpha_y) \cdot \det(\alpha_x) = 1. \tag{6}$$

Wir werden zeigen, dass unter der Bedingung $\det(a_x) \neq 0$ eine symplektische Abbildung φ eine skalare Funktion $f(y,\xi)$ (wieder erzeugende Funktion genannt) induziert mit

$$x = \alpha(y,\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} f(y,\xi)$$
$$\eta = \beta(y,\xi) = \frac{\partial}{\partial y} f(y,\xi)$$

In den Koordinaten $(x,\xi,y,\eta) \in \mathbb{R}^{4n}$ hat die 1-Form

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \,\mathrm{d}y^j + \xi_j \,\mathrm{d}x^j$$

die äußere Ableitung

$$\omega = \mathrm{d}\sigma = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}\eta^j \wedge \mathrm{d}y^j - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}\xi^j \wedge \mathrm{d}x^j.$$

Wir definieren die Einbettungen i und $j\colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{4n}$ durch

$$i\colon (y,\xi) \longmapsto (\alpha(y,\xi),\xi,y,\beta(y,\xi))$$
$$j\colon (x,\xi) \longmapsto (x,\xi,a(x,\xi),b(x,\xi)),$$

und definieren den lokalen Diffeomorphismus $\psi\colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ durch $\psi(y,\xi) \mapsto (x,\xi) = (\alpha(y,\xi),\xi)$ erhalten wir $i = j \circ \psi$. Damit

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(i^*\sigma) &= i^* \,\mathrm{d}\sigma = \psi^*(j^* \,\mathrm{d}\sigma)\\ &= \psi^*(\varphi^*\omega - \omega).\end{aligned}$$

Da φ eine symplektische Abbildung ist, gilt $\varphi^*\omega - \omega = 0$, sodass $i^*\sigma$ eine geschlossene und damit exakte Form ist. Es gilt daher

$$\begin{aligned} i^*\sigma(y,\xi) &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j(y,\xi)\,\mathrm{d}y^j + \alpha_j(y,\xi)\,\mathrm{d}\xi^j \\ &= \mathrm{d}f(y,\xi) = \sum_{j=1}^{n} f_{y_j}(y,\xi)\,\mathrm{d}y^j + f_{\xi_j}(y,\xi)\,\mathrm{d}\xi^j, \end{aligned}$$

für eine glatte Funktion $f = f(y,\xi)$. Wir haben gezeigt:

Proposition 8. *Jede symplektische Abbildung φ, welche durch (1) und(2) gegeben ist und (3) erfüllt, kann lokal in folgender impliziten Form dargestellt werden*

$$x = \frac{\partial}{\partial \xi} f(y,\xi) \tag{7}$$

$$\eta = \frac{\partial}{\partial y} f(y,\xi), \tag{8}$$

wobei $\det(f_{y\xi}) \neq 0$. *Umgekehrt definiert jede glatte Funktion $f = f(y,\xi)$, welche die letzte Ungleichung erfüllt, durch (7) und (8) eine symplektische Abbildung φ.*

Um diese Aussage zu verallgemeinern schauen wir uns die Gruppe der elementaren symplektischen Transformation auf $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ an. Diese werden erzeugt durch die Rotation

$$\begin{aligned} y_1 &= \xi_1, \quad y_k = \xi_k, \quad k \geq 2 \\ \eta_1 &= -x_1, \quad \eta_k = x_k, \end{aligned}$$

und die Abbildungen

$$y_j = x_{\pi(j)}, \; \eta_j = \xi_{\pi(j)}, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

wobei π ein Element der symmetrischen Gruppe S_n ist. Die oben beschriebenen Abbildungen sind alle symplektisch und können durch eine Matrix repräsentiert werden, welche wir in Zukunft mit E bezeichnen. Lineare Algebra schenkt uns dann folgendes Lemma:

Lemma 9. *Sei U eine lineare Abbildung auf* $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. *Dann existiert eine elementare symplektische Transformation mit*

$$U \cdot E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \; \textit{und} \; \det A \neq 0.$$

Mit Lemma 9 ist es uns nun möglich Proposition 8 zu verallgemeinern. Wenn eine symplektische Abbildung φ nun eine nicht invertierbare Jacobi-Determinante A hat, können wir unser Lemma anwenden um Regularität zu erlangen. Mit der selben Methode wie oben können nun andere erzeugende Funktionen konstruiert werden, abhängig von den Koordinaten welche anfangs ausgewählt werden (in unserem Beispiel waren dies (y,ξ)). Es ergibt sich eine erzeugende Funktion für jede symplektische Abbildung.

Example 10. Das einfachste Beispiel behandelt eine einfache Transformation. Sei

$$y = a(x),$$

unabhängig von ξ. Wir wenden Lemma 9 an um $\det(a_x) \neq 0$ zu erhalten.Wir möchten die kanonische Transformation $\varphi(x, \eta)$ durch f erzeugen, sodass φ die obige Gleichung fortsetzt. Wir erhalten nach Proposition 8 für die erzeugende Funktion $f(x, \eta)$ die notwendige Bedingung

$$\begin{aligned} y =& f_\eta(x, \eta) \\ \xi =& f_x(x, \eta). \end{aligned}$$

Dann gilt auch dass

$$f_\eta(x, \eta) = a(x) \text{ und damit } f(x, \eta) =< a(x), \eta > +v(x)$$

mit einer beliebigen Funktion $v(x)$. Wir erhalten $\xi = f_x = a_x^T(x)\eta + v_x(x)$ und damit die Darstellung $\begin{cases} y &= a(x) \\ \eta &= (a_x^T)^{-1}(\xi - v_x) \end{cases}$.

Allgemeiner kann gefragt werden, wann die Transformation

$$y_j = a_j(x, \eta)$$

zu einer kanonischen Transformation erweitert werden kann. Diese Frage beantwortet Louivilles Theorem. Wir benötigen dazu noch folgende Beobachtung. Sei M eine symplektische Mannigfaltigkeit. In Darboux Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ kann die Poisson-Klammer von zwei glatten Funktionen $G(x, y)$ und $H(x, y)$ dargestellt werden durch

$$\{G, H\} =< G_x, H_y > - < G_y, H_y > .$$

Für die Koordinatenabbildung $(x, y) \mapsto x_j$ erhalten wir zum Beispiel die Poisson-Klammer $\{x_i, x_j\} = 0$. Für eine symplektische Abbildung $\varphi\colon (x, \xi) \mapsto (y, \eta) =: (a(x, \xi), b(x, \xi))$ können wir daher mit der Invarianz der Poisson-Klammer unter symplektischen Abbildungen schließen, dass $\{a_i, a_j\} = 0$. Bemerkenswerterweise gilt auch das Gegenteil:

Theorem 11 (Liouville)**.** *Betrachte n Funktionen $a_j = a_j(x, \xi)$, $1 \leq j \leq n$ mit*

(i) $\{a_i, a_j\} = 0,$

(ii) $\operatorname{rank}(a_x, a_\xi) = n.$

Dann existiert ein lokaler Symplektomorphismus $\varphi = (a, b)$,

$$\begin{aligned} y &= a(x, \xi), \\ \eta &= b(x, \xi), \end{aligned}$$

welcher $y = a(x, \xi)$ fortsetzt.

Proof. Das Ziel ist eine erzeugende Funktion zu finden welche die symplektische Abbildung φ erzeugt und $y = a(x,\xi)$ fortsetzt. Nach Lemma 9 können wir annehmen, dass $\det(a_x) \neq 0$ und können daher, wie in (5), die Gleichung $x = a(y,\xi)$ für $\xi = \alpha(x,\eta)$ lösen. Dann ist α_ξ symmetrisch. Denn (i) und die Formel für die Poisson-Klammer $\{F,G\} =< F_x, G_\xi > - < F_\xi, F_x >$ implizieren, dass $a_\xi a_x^T - a_x a_\xi^T = 0$ und somit $a_\xi^T (a_x^T)^{-1} - a_x^{-1} a_\xi = 0$, also ist $a_x^{-1} a_\xi$ symmetrisch. Wenn wir nun $x = \alpha(a(x,\xi),\xi)$ nach x und ξ ableiten, erhalten wir

$$1 = \alpha_y a_x \text{ and } 0 = \alpha_y a_\xi + \alpha_\xi,$$

und daher, dass $\alpha_\xi = -a_x^{-1} a_\xi$ symmetrisch ist. Somit existiert lokal eine Funktion $f = f(y,\xi)$ mit

$$\alpha(y,\xi) = f_\xi(y,\xi).$$

Ferner gilt $\det(f_{y\xi}) = \det \alpha_y = (\det \alpha_x)^{-1} \neq 0$, woraus folgt, dass f eine erzeugende Funktion ist von der gewünschten symplektischen Abbildung φ, welche $y = a(x,\xi)$ fortsetzt. □

Corollary 12. *Für $(n+1)$ Funktionen $a_0, a_1 \dots, a_n$ mit*

(i) $\{a_j, a_k\} = 0, \; j,k = 0,1,\dots,n,$

(ii) $\operatorname{rank}\Big(a_{j\xi}, a_{j\eta}\Big)_{j=1,2,\dots,n} = n,$

kann a_0 als Funktion von $a_1,\dots,a_n$ ausgedrückt werden. Insbesondere, existieren höchstens n unabhängige Funktionen, welche (i) erfüllen.

Proof. Als erstes benutzen wir Liouvilles Theorem um die Relation $y = a(x,\xi)$ fortzusetzen. Damit finden wir eine symplektische Abbildung φ mit $a \circ \varphi(y,\eta) = y$. Wir setzten $a_0 \circ \varphi = f(y,\eta)$ und erhalten $0 = \{a_j, a_0\} = \{y_j, f\} = f_{\eta_j}$, sodass f unabhängig von η ist. Demnach ist $a_0 = f(a_1,\dots,a_n)$ und beweist somit das Korollar. □

References

[Cannas da Silva] Cannas da Silva, Ana:
Lectures on Symplectic Geometry. Springer-Verlag, (2006).

[Audin] Audin, Michèle:
On the Topology of Lagrangian Submanifolds, Examples and Counter-Examples. https://www.emis.de/journals/PM/62f4/pm62f401.pdf.

[Weinstein] Weinstein, Alan:
Lectures on Symplectic Manifolds. AMS and CBMS, (1977).

[Hofer, Zehnder] Hofer H., Zehnder E.:
Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics. Birkhäuser Verlag Basel, (1994).

[Moser, Zehnder] Moser J., Zehnder E.:
Notes on Dynamical Systems. American Mathematical Society, (2005).