Differentialgeometrie 2 – Übungszettel 9

Heidelberg, Wintersemester 2019/2020

Gabriele Benedetti   Kevin Emanuel Wiegand

9-1 Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension n. Wir betrachten die folgenden Eigenschaften für ein Tensor $T \in (V^*)^{\otimes 4}$:

(a) $T(v_1, v_2, v_3, v_4) = -T(v_2, v_1, v_3, v_4)$,

(b) $T(v_1, v_2, v_3, v_4) = -T(v_1, v_2, v_4, v_3)$,

(c) $T(v_1, v_2, v_3, v_4) = T(v_3, v_4, v_1, v_2)$,

(d) $T(v_1, v_2, v_3, v_4) + T(v_2, v_3, v_1, v_4) + T(v_3, v_1, v_2, v_4) = 0$

für alle $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$.

Es sei $\mathcal{A}(V) \subset (V^*)^{\otimes 4}$ die Menge der Tensoren, die (a) und (b) erfüllen, $\mathcal{B}(V) \subset (V^*)^{\otimes 4}$ die Menge der Tensoren, die (a), (b) und (c) erfüllen, $\mathcal{R}(V) \subset (V^*)^{\otimes 4}$ die Menge der Tensoren, die (a), (b), (c) und (d) erfüllen.

Wir beweisen nun durch die folgenden Schritte, dass $\dim \mathcal{R}(V) = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$:

(i) Es gibt einen Isomorphismus $\Phi : \mathcal{A}(V) \to (\Lambda^2 V)^* \otimes (\Lambda^2 V)^*$, der durch die Eigenschaft

$$\Phi(T)(v_1 \wedge v_2, v_4 \wedge v_3) = T(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

bestimmt ist. Außerdem gilt $\Phi(\mathcal{B}(V)) = \mathrm{Sym}^2(\Lambda^2 V)$, die Menge der symmetrischen Bilinearformen auf $\Lambda^2 V$.

Hinweis: nehmen Sie eine Basis $\{b_i\}_{1 \le i \le n}$ von V und betrachten Sie die assoziierte Basis $\{b_i \wedge b_j\}_{1 \le i < j \le n}$ von $\Lambda^2 V$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $B : \mathcal{B}(V) \to \Lambda^4 V^*$,

$$B(T)(v_1, v_2, v_3, v_4) = \frac{1}{3}\Big(T(v_1, v_2, v_3, v_4) + T(v_2, v_3, v_1, v_4) + T(v_3, v_1, v_2, v_4)\Big)$$

wohldefiniert ist.

Hinweis: die Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_4$ ist erzeugt durch die drei Permutationen, die in Zyklenschreibweise als (12), (34), (123) gegeben werden.

(iii) Zeigen Sie, dass $\Lambda^4 V^* \subset \mathcal{B}(V)$ und $B|_{\Lambda^4 V^*} = \mathrm{id}_{\Lambda^4 V^*}$.

(iv) Folgern Sie, dass $\dim \ker B = \dim \mathcal{B}(V) - \dim \Lambda^4 V^*$.

(v) Benutzen Sie, dass $\mathcal{R}(V) = \ker B$ um die Dimension von $\mathcal{R}(V)$ zu berechnen.

9-2 Es sei G eine kompakte Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g} = T_e G$. Wir wollen zeigen, dass eine bi-invariante Riemannsche Metrik g auf G existiert. Für alle $\gamma \in G$ betrachten wir dazu die Konjugation $C_\gamma : G \to G$ definiert durch $C_\gamma = R_\gamma \circ L_{\gamma^{-1}}$, wobei R und L die Rechts- und Linksmultiplikation bezeichnen. Dann ist $\mathrm{d}_e C_\gamma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein linearer Isomorphismus.

(a) Es sei g eine linksinvariante PR-Metrik auf G. Zeigen Sie, dass g auch rechtsinvariant ist, wenn

$$(\mathrm{d}_e C_\gamma)^* g_e = g_e, \qquad \forall\, \gamma \in G.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst

$$((R_\gamma)^* g)_e = g_e. \tag{$\star$}$$

Dann nehmen Sie $\delta \in G$ beliebig, multiplizieren Sie beide Seiten von ($\star$) durch $\mathrm{d}_\delta L^*_{\delta^{-1}}$ und benutzen Sie, dass $R_\gamma \circ L_{\delta^{-1}} = L_{\delta^{-1}} \circ R_\gamma$.

(b) Zeigen Sie, dass eine linksinvariante Volumenform ω auf G existiert.

(c) Es sei $V = \mathrm{Sym}^2(\mathfrak{g})$ der Vektorraum der symmetrischen Bilinearformen auf $\mathfrak{g}$. Für $h \in V$ betrachten Sie die glatte Funktion $f_h : G \to V$ definiert als

$$f_h(\gamma) = (\mathrm{d}_e C_\gamma)^* h, \qquad \forall\, \gamma \in G.$$

Wir setzen für $h \in V$

$$\bar{h} := \int_G f_h \omega \in V,$$

wobei ω eine linksinvariante Volumenform auf G ist. Warum ist das Integral wohldefiniert?

(d) Beweisen Sie, dass $(\mathrm{d}_e C_\gamma)^* \bar{h} = \bar{h}$ für alle $\gamma \in G$.
Hinweis: lineare Abbildungen kommutieren mit dem Integral.

(e) Zeigen Sie, dass $\bar{h}$ positiv definit ist, falls h positiv definit ist.
Hinweis: für $v \in \mathfrak{g}$ schreiben Sie $\bar{h}(v, v)$ als Integral.
Bemerkung: wenn h nur nicht ausgeartet ist, dann ist nicht klar, dass $\bar{h}$ auch nicht ausgeartet ist.

(f) Zeigen Sie, dass eine bi-invariante Riemannsche Metrik auf G existiert.

9-3 Es sei G eine Lie Gruppe mit einer bi-invarianten PR-Metrik und X, Y, Z linksinvariante Vektorfelder auf G. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $R(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y], Z]$.

(b) Es gilt $g([X,Y], Z) + g(Y, [X,Z]) = 0$.
Hinweis: substituhieren Sie die Lie-Klammern in dieser Gleichung durch Levi-Civita Ableitungen mit Hilfe der Aufgabe 4-4(b).

(c) Folgern Sie, dass $R(X,Y,Y,X) = \frac{1}{4} g([X,Y],[X,Y])$ und dass die Schnittkrümmung von g nicht negativ ist, falls g eine Riemannsche Metrik ist.

Aufgabe zum Vorrechnen

9-4 Es sei $F : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ eine isometrische Immersion von Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit $\dim \tilde{M} = \dim M + 1$. Nehmen Sie an, dass das Normalenbündel $\mathcal{N}_F$ trivial ist, und sei $\nu \in \Gamma(\mathcal{N}_F)$ ein normierter Schnitt. Sei $S \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ der Formoperator,

$$S \cdot X = -(\mathrm{d}F)^{-1} \cdot {}^F\tilde{\nabla}_X \nu.$$

Beweisen Sie:

(a) es gilt $I\!I(X,Y) = g(S \cdot X, Y)\nu$ für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$;

(b) die Gauß-Formel wird zu

$$R(X,Y,Z,W) = F^*\tilde{R}(X,Y,Z,W) + g(S\cdot X, W) g(S \cdot Y, Z) - g(S \cdot X, Z) g(S \cdot Y, W)$$

(c) Ist $\dim M = 2$ mit Gaußkrümmung $K : M \to \mathbb{R}$ und $(\tilde{M}, \tilde{g}) = (\mathbb{R}^3, g_{\mathbb{R}^3})$, dann gilt

$$K = \det S. \qquad (\star)$$

Sie haben somit das Theorema Egregium von Gauß bewiesen: die Determinante des Formoperators einer immersierten Fläche in $\mathbb{R}^3$ hängt nur von (M, g) und nicht von der Immersion F ab.
Bonus: wie ändert sich $(\star)$, wenn $(\tilde{M}, \tilde{g})$ konstante Krümmung $c \in \mathbb{R}$ besitzt?

Kevins Weihnachtsaufgabe

9-5 Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. Eine k-Form $\eta \in \Lambda^k V^*$ heißt **zerlegbar**, wenn es 1-Formen $\eta_1, \ldots, \eta_k$ auf V mit $\eta = \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k$ gibt. Zeigen Sie:

(a) Es sei ω eine Volumenform auf V gegeben. Die Abbildung $\Phi : V \to \Lambda^{n-1} V$ definiert durch $\Phi(X) = \iota_X \omega$ ist ein Isomorphismus.

(b) Jede $(n-1)$-Form η auf V ist zerlegbar.
Hinweis: ergänzen Sie $\Phi^{-1}(\eta)$ zu einer Basis von V und konstruieren Sie eine Volumenform ω' mittels der Dualbasis.

(c) Ist $\eta = \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k \neq 0$ zerlegbar, dann sind $\eta_1, \ldots, \eta_k$ linear unabhängig und

$$\operatorname{Ann} \eta := \{v \in V \mid \iota_v \eta = 0\}$$

ist ein Vektorraum der Dimension $n - k$.
Beweis: ergänzen Sie $\eta_1, \ldots, \eta_k$ zu einer Basis von V^*.
Bemerkung: man kann umgekehrt zeigen, dass $\eta \in \Lambda^k V^*$ genau dann zerlegbar ist, wenn $\dim(\operatorname{Ann} \eta) = n - k$ ist.

(d) Ist $n \leq 3$, dann ist jede k-Form auf V zerlegbar. Geben Sie ein Beispiel einer nicht-zerlegbaren k-Form für $n = 4$ an.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch ins neue Jahr!

Buon Natale e Felice Anno Nuovo!