Differentialgeometrie 2 – Übungszettel 7

Heidelberg, Wintersemester 2019/2020

Gabriele Benedetti Kevin Emanuel Wiegand

7-1 Betrachten Sie $\tilde{M} := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit der PR-Metrik $\tilde{g}$, die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & r^{-2} \\ r^{-2} & 0 \end{pmatrix} \qquad r^2 := x^2 + y^2$$

bezüglich der Basis ∂_x, ∂_y gegeben ist. Es sei $X = a\partial_x$ ein lichtartiges Vektorfeld auf $\tilde{M}$, wobei $a : \tilde{M} \to (0, \infty)$ eine positive Funktion ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\nabla_X X = 0$ genau dann, wenn

$$a = b(y)r^2,$$

für eine Funktion $b : \mathbb{R} \to (0, \infty)$. Hier bezeichnet ∇ die Levi-Civita Ableitung von g.

(b) Man nehme $b \equiv 1$ und zeigen Sie, dass der Fluß von X nicht vollständig ist. Schließen Sie daraus, dass der geodätische Fluß von $(\tilde{M}, \tilde{g})$ nicht vollständig ist. *Hinweis: Berechnen Sie die maximale Integralkurve durch ein $(x_0, 0)$ mit $x_0 \neq 0$ explizit.*

(c) Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in (0, \infty)$ die Streckung $\mu_\lambda : \tilde{M} \to \tilde{M}$ eine Isometrie von $(\tilde{M}, \tilde{g})$ ist.

(d) Betrachten Sie die Quotientenabbildung $\pi : \tilde{M} \to M := \tilde{M}/G$, wobei G die Untergruppe von $\mathrm{Iso}(M, g)$ darstellt, die durch μ_λ erzeugt ist. Zeigen Sie, dass M Diffeomorph zu einem Torus ist und dass eine Metrik g auf M existiert, sodass π eine PR-Überlagerung ist. Schließen Sie daraus, dass (M, g), der sogenannte Clifton-Pohl Torus, eine kompakte PR-Mannigfaltigkeit mit unvollständigem geodätischen Fluß ist.

7-2 Es sei $F : (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ eine PR-Submersion. Wenn U eine offene Menge in M und $X \in \mathfrak{X}(U)$ ein Vektorfeld auf U ist, schreiben wir $X^{\mathcal{H}} \in \mathfrak{X}(F^{-1}(U))$ für die horizontale Hochhebung von X. Zeigen Sie: gegeben zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ auf U und ein vertikales Vektorfeld $Z \in \mathfrak{X}(F^{-1}(U))$ auf $F^{-1}(U)$ so gilt:

$$[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}] - [X, Y]^{\mathcal{H}} \text{ und } [X^{\mathcal{H}}, Z] \text{ sind vertikal.}$$

Benutzen Sie dann die Koszul Formel um zu zeigen, dass

$$\nabla^{\tilde{g}}_{X^{\mathcal{H}}}(Y^{\mathcal{H}}) = \left(\nabla^g_X Y\right)^{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]^{\mathcal{V}}, \qquad (\star)$$

wobei $Z \mapsto Z^{\mathcal{V}}$ die orthogonale Projektion $T\tilde{M} \cong \mathcal{H} \oplus \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ darstellt.

Es sei nun $\tilde{p} \in \tilde{M}$, $\tilde{v} \in \mathcal{H}_{\tilde{p}}$ und setzen Sie $p := F(\tilde{p})$, $v := \mathrm{d}_{\tilde{p}}F \cdot \tilde{v}$. Betrachten Sie die Geodätische $\gamma_{\tilde{v}}; I_{\tilde{v}} \to \tilde{M}$ für $(\tilde{M}, \tilde{g})$ und zeigen Sie:

(a) die Kurve $\gamma_{\tilde{v}}$ ist horizontal, d.h. $\dot{\gamma}_{\tilde{v}}(t) \in \mathcal{H}_{\gamma_{\tilde{v}}(t)}$ für alle $t \in I_{\tilde{v}}$;

(b) die Kurve $F \circ \gamma_{\tilde{v}}$ ist eine Geodätische für (M, g) mit Anfangsvektor v.

Hinweis: finden Sie in einer Umgebung U von p ein Vektorfeld X, sodass die Identität $\dot{\gamma}_v = X \circ \gamma_v$ gilt. Zeigen Sie mit Hilfe der Formel $(\star)$, dass die Integralkurve $\tilde{\gamma}_v : (-\epsilon, \epsilon) \to \tilde{M}$ von $X^{\mathcal{H}}$ mit $\tilde{\gamma}_v(0) = \tilde{p}$ eine Geodätische ist. Daraus folgt, dass $\tilde{\gamma}_v = \gamma_{\tilde{v}}|_{(-\epsilon,\epsilon)}$ horizontal ist und $F \circ \gamma_{\tilde{v}}|_{(-\epsilon,\epsilon)}$ eine Geodätische mit Anfangsvektor v ist. Setzen Sie

$$A := \{t \in I_{\tilde{v}} \mid \gamma_{\tilde{v}}|_{[0,t)} \text{ erfüllt (a) und (b)}\}.$$

und beweisen Sie, dass $A = I_{\tilde{v}}$.

Schließen Sie daraus die Inklusion $I_{\tilde{v}} \subset I_v$ und die folgende Implikation:

$$(\tilde{M}, \tilde{g}) \text{ geodätisch vollständig} \implies (M, g) \text{ geodätisch vollständig.}$$

Aufgaben zum Vorrechnen

7-3 Es sei $F : (N, g^N) \to (M, g^M)$ eine isometrische Einbettung, sodass $F(N)$ abgeschlossen in M ist. Zeigen Sie, dass (N, g^N) vollständig ist, falls (M, g^M) vollständig ist.

7-4 Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Es sei $v \in T_pM \setminus \{0_p\}$, sodass $\gamma_v : [0, T] \to M$ eine minimierende Geodätische ist. Zeigen Sie, dass für alle $t \in (0, T)$ die Kurve $\gamma_v|_{[0,t]}$ eine minimierende Geodätische von p nach $\gamma_v(t)$ ist, eindeutig bis auf Skalierung der Geschwindigkeit ist. Ist diese Aussage wahr für $t = T$?