Differentialgeometrie 1 – Übungszettel 7

Heidelberg, Sommersemester 2019

Gabriele Benedetti Urs Fuchs

Abgabe bis 6.5.2019 um 16 Uhr, Briefkasten 04 im 1.OG, Mathematikon

Aufgaben zum Abgeben

7-1 (2 Punkte) Es sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen: Wenn F eine Immersion ist bei $p \in M$, dann ist $\mathrm{d}F : TM \to TN$ eine Immersion bei allen $[\gamma]_p \in T_pM$. Wenn F außerdem eine Einbettung ist, dann ist auch $\mathrm{d}F$ eine Einbettung.

7-2 (a) (2 Punkte) Es sei

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x, v) = (|x|^2 - 1, \langle x, v\rangle)$$

Zeigen Sie, dass $F^{-1}((0, 0))$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ ist. Zeigen Sie weiter, dass $\mathrm{d}\iota : TS^n \to F^{-1}((0, 0))$ ein Diffeomorphismus ist, wobei $\iota : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ die Inklusion ist.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\mathrm{d}\iota : TS^n \to \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ *eine Einbettung ist und benutzen dann Satz 5.24.*

(b) (3 Punkte) Es sei $L^+(\mathbb{R}^{n+1})$ der Raum der orientierten Geraden in $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir erfassen $L^+(\mathbb{R}^{n+1})$ als $L^+(\mathbb{R}^{n+1}) = (\mathbb{R}^{n+1} \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}))/\sim$ mit der Quotiententopologie, wobei

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lambda > 0,\ \exists\, \mu \in \mathbb{R}, \quad v_2 = \lambda v_1, \quad x_2 = x_1 + \mu v_1$$

Zeigen Sie, dass $L^+(\mathbb{R}^{n+1})$ und TS^n homöomorph sind. *Hinweis: wenn* $g \in L^+(\mathbb{R}^{n+1})$, *betrachten Sie den Punkt* $w \in g$ *mit minimalem Abstand vom Ursprung* $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$.

7-3 (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $SO(2) \cong \mathbb{T}^1$ und $SO^+(1, 1) \cong \mathbb{R}$. *Hinweis: Benutzen Sie (hyperbolische) trigonometrische Funktionen.*

(2 Punkte) Beweisen Sie, dass $SO(n)$ kompakt ist und dass $SO^+(p, q)$ für $p, q > 0$ und $SL_m(\mathbb{R})$ für $m > 1$ nicht kompakt sind.

(2 Punkte) Bestimmen Sie $T_eSO(n)$ und $T_eSL_n(\mathbb{R})$ als Untervektorräume von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

Aufgaben nicht zum Abgeben

7-4 Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $M_a = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid |x|^2 - t^2 = a\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Für welche Werte von a ist M_a eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$? Von welcher Dimension? Wann ist M_a diffeomorph zu zwei Kopien von $\mathbb{R}^n$, wann zu $S^{n-1} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$?

Zeigen Sie: jedes $A \in O(n, 1)$ liefert einen Diffeomorphismus $A : M_a \to M_a$.

7-5 Finden Sie eine Lie-Untergruppe von $U(n)$, die diffeomorph zu $\mathbb{T}^n$ ist. Unter der Identifizierung $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ zeigen Sie, dass $U(n) \subset SO(2n)$. Finden Sie eine Lie-Untergruppe von $SO(m)$, die diffeomorph zu $\mathbb{T}^{k(m)}$ ist, wobei $k(m) = m/2$ falls m gerade ist und $k(m) = (m-1)/2$ falls n ungerade ist. *Zur Info: die Tori, die Sie finden, sind die höchst-dimensionalen Tori, die in den jeweiligen Gruppen als Lie-Untergruppen gefunden werden können.*

7-6 Es sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel. Es sei U eine offene Menge von M. Zeigen Sie: es gibt eine Trivialisierung $\chi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ über U genau dann, wenn π einen glatten Rahmen über U besitzt (siehe Definition 6.6). Schließen Sie daraus: π ist ein triviales Vektorbündel genau dann, wenn ein Rahmen von π über M existiert.