Differentialgeometrie 2 – Übungszettel 6

Heidelberg, Wintersemester 2019/2020

Gabriele Benedetti Kevin Emanuel Wiegand

6-1 Es sei (G, g) eine Lie-Gruppe mit einer linksinvarianten PR-Metrik. Wie üblich sei $\mathfrak{g} := T_{\mathrm{id}}G$ die Lie-Algebra von G, die wir mit dem Raum der linksinvarianten Vektorfelder $\mathfrak{X}_L(G)$ durch $X \mapsto X(\mathrm{id})$ identifizieren. Wir definieren eine Bilinearabbildung $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ durch die Gleichung

$$g([X, Y], Z) = g(B(X, Z), Y), \qquad \forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Wenn $\gamma : (t_0, t_1) \to G$ eine Kurve ist, definieren wir den intrinsischen Geschwindigkeitsvektor $\omega : (t_0, t_1) \in \mathfrak{g} = T_{\mathrm{id}}G$ als $\omega(t) = \mathrm{d}_{\gamma(t)} L_{\gamma(t)^{-1}} \dot\gamma(t)$. Zeigen Sie, dass γ genau dann eine Geodätische ist, wenn

$$\dot\omega = B(\omega, \omega). \tag{$\star$}$$

Hinweis: wählen Sie einen Rahmen $X_1, \ldots, X_n$ von linksinvarianten Vektorfeldern und sei $X \in \mathfrak{X}_L(G)$ beliebig. Schreiben Sie $\dot\gamma = \sum_i \omega^i X_i \circ \gamma$. Benutzen Sie die Leibnizregel um $g({}^\gamma\nabla_{\partial_t}\dot\gamma, X)$ zu berechnen und bestimmen Sie dann $g(\nabla_{X_i} X_j, X)$ mittels der Koszulformel.

Es sei nun $G = SO(3)$ und wir identifizieren $\mathfrak{so}(3)$ mit $\mathbb{R}^3$ durch

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -x & -y \\ x & 0 & -z \\ y & z & 0 \end{pmatrix}$$

Dann entspricht die Lie-Klammer auf $\mathfrak{so}(3)$ dem Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Wir nehmen eine linksinvariante Riemannsche Metrik g mit Matrixdarstellung I bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{so}(3)$. Zeigen Sie, dass

$$B(X, Y) = I^{-1}((IX) \times Y), \qquad \forall\, X, Y \in \mathbb{R}^3.$$

Aus Formel $(\star)$ folgern Sie die Eulergleichung der Kreiseltheorie, falls I diagonal ist.

6-2 Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit mit Tangentialbündel $\pi : TM \to M$ und $F : TM \to TM$ eine Abbildung mit $F(T_pM) \subset T_pM$ für alle $p \in M$.

Betrachten Sie die Newtonsgleichungen für die Bahn $\gamma : (t_0, t_1) \to M$ eines Teilchens mit Einheitsmasse unter der Wirkung der Kraft F:

$${}^\gamma\nabla_{\partial_t}\dot\gamma = F(\dot\gamma). \tag{$\star$}$$

Zeigen Sie, dass ein Vektorfeld X_F auf TM existiert, sodass γ die Gleichung $(\star)$ genau dann löst, wenn $\dot\gamma$ eine Integralkurve von X_F ist.

Es sei nun $V : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $B \in \Omega^2(M)$ eine 2-Form (das heißt, dass $B_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ eine schiefsymmetrische Bilinearform für alle $p \in M$ ist). Wir definieren dazu die Energiefunktion $E : TM \to \mathbb{R}$

$$E(v) = \frac{1}{2} g_{\pi(v)}(v, v) + V(\pi(v)), \qquad \forall\, v \in TM$$

und den Bündelhomomorphismus $Y : TM \to TM$ durch die Gleichung

$$g_p(u, Y_p \cdot v) = B_p(u, v), \qquad \forall\, p \in M,\ u, v \in T_pM.$$

Zeigen Sie, dass wenn die Kraft $F = -\mathrm{grad} V(\pi) + Y$ ist, dann ist die Energie $E(\dot{\gamma})$ konstant entlang der Lösungen von $(\star)$.

Bemerkung: wenn γ ein geladenes Teilchen ist, interpretieren wir V als ein elektrisches Potential, B als das magnetische Vektorfeld und F als die zugehörige Lorentzkraft.

6-3 Es sei g das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und $|\cdot|$ die dazugehörige Norm. Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$F(0) = 0, \qquad |F(v) - F(w)| = |v - w|, \qquad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass F linear ist. *Hinweis: Zeigen Sie erst, dass $|F(v)| = |v|$ und dann dass $g(F(v), F(w)) = g(v, w)$. Berechnen Sie dann $|F(\lambda v) - \lambda F(v)|^2$ und $|F(v + w) - F(v) - F(w))|^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v, w \in \mathbb{R}^n$.*

6-4 Es seien (M_1, g_1) und (M_2, g_2) R-Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension und $F : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ eine Bijektion, sodass $d_{g_2}(F(p), F(q)) = d_{g_1}(p, q)$, $\forall\, p, q \in M_1$. Zeigen Sie mit Hilfe von (i)-(v): F ist eine Isometrie.

(i) Zeigen Sie, dass wenn $\gamma : (t_0, t_1) \to M_1$ eine Geodätische ist, dann ist $F \circ \gamma$ eine Geodätische. *Hinweis: für alle $t \in (t_0, t_1)$ finden Sie $s_0 \in (t_0, t)$ und $s_1 \in (t, t_1)$, sodass $F(\gamma(t))$ sich auf der einzigen minimalen Geodätischen von $F(\gamma(s_0))$ nach $F(\gamma(s_1))$ befindet.*

(ii) Für $p_1 \in M_1$ sei U_1 eine Normalumgebung von p_1 und U_2 eine Normalumgebung von $p_2 = F(p_1)$, sodass $F(U_1) \subset U_2$. Es sei $\psi : V_1 \to V_2$ die Darstellung von F in diesen Koordinaten. Zeigen Sie, dass $\psi(tv) = t\psi(v)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, sodass $tv \in V_1$.

(iii) Es sei $\tilde{\psi} : T_{p_1}M_1 \to T_{p_2}M_2$ die einzige Erweiterung von ψ auf $T_{p_1}M_1$, für die $\tilde{\psi}(tv) = t\tilde{\psi}(v)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $v \in T_{p_1}M_1$. Zeigen Sie mittels Aufgabe 6-5, dass $|\tilde{\psi}(v) - \tilde{\psi}(w)|_{p_2} = |v - w|_{p_1}$ für alle $v, w \in T_pM_1$.

(iv) Folgern Sie aus Aufgabe 6-3, dass $\tilde{\psi}$ linear ist.

(v) Bemerken Sie, dass F glatt auf U_1 ist und dass $\mathrm{d}_pF = \tilde{\psi}$ gilt.

Da p beliebig war, ist F somit eine Isometrie.

Aufgaben zum Vorrechnen

6-5 Es sei (M, g) eine R-Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$\lim_{t \to 0} \frac{d_g(\exp_p(tv), \exp_p(tw))}{t} = |v - w|_p, \qquad \forall\, v, w \in \mathcal{E}_p.$$

Hinweis: benutzen Sie, dass $g_0^p = g_p$ um zu zeigen, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$(1 - \epsilon)|u|_{g_p} \le |u|_{g_v^p} \le (1 + \epsilon)|u|_{g_p}, \qquad \forall\, v \in B_\delta^{T_pM},\ u \in T_vB_\delta^{T_pM} \cong T_pM.$$

Schließen Sie daraus, dass für t klein genug eine Kurve γ zwischen tv und tw mit $L_g(\gamma) \le (1 + \epsilon)|v - w|_p$ existiert und dass jede Kurve γ_1 zwischen tv und tw mit $L_g(\gamma_1) \le t|v - w|_p$ in $B_\delta^{T_pM}$ enthalten sein muss. Folgern Sie: $(1 - \epsilon)t|v - w|_p \le d_g(\exp_p(tv), \exp_p(tw)) \le (1 + \epsilon)t|v - w|_p$ für t klein.