Differentialgeometrie 1 – Übungszettel 6

Heidelberg, Sommersemester 2019

Gabriele Benedetti Urs Fuchs

Abgabe bis 31.5.2019 um 11 Uhr, Briefkasten 04 im 1.OG, Mathematikon

Aufgaben zum Abgeben

6-1 Es sei $\iota : N \to O$ eine Einbettung und $p \in N$ beliebig.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für jede offene Umgebung U von p in N eine offene Umgebung U' von $\iota(p)$ in O existiert mit $U' \cap \iota(N) = \iota(U)$.

(b) (2 Punkte) Benutzen Sie (a) um zu zeigen: Es gibt eine Karte (U_O, φ_O) von O um $\iota(p)$, sodass $\varphi_O(U_O \cap \iota(N)) = V_O \cap (\mathbb{R}^{\dim N} \times \{0\})$, wobei wir $\mathbb{R}^{\dim O} \cong \mathbb{R}^{\dim N} \times \mathbb{R}^{\dim O - \dim N}$ identifizieren.

6-2 (2 Punkte) Es seien $\iota_1 : M_1 \to N$ und $\iota_2 : M_2 \to N$ zwei Einbettungen mit $\iota_1(M_1) = \iota_2(M_2)$. Zeigen Sie, dass M_1 und M_2 diffeomorph sind.

6-3 Eine Lie-Gruppe ist eine glatte Mannigfaltigkeit G, die zusätzlich die Struktur einer Gruppe besitzt, so dass die Gruppenverknüpfung $\mu : G \times G \to G$ und die Inversion $\iota : G \mapsto G$ glatte Abbildungen sind. Für alle $g \in G$ schreiben wir $L_g : G \to G$ und $R_g : G \to G$ für die Links- und Rechtsmultiplikation durch g: $L_g(h) = \mu(g, h)$ und $R_g(h) = \mu(h, g)$.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass L_g, R_g und ι Diffeomorphismen von G nach G sind.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{T}^n$ Lie-Gruppen sind.

6-4 Es sei $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ die $\mathbb{R}$-Algebra der $n \times n$-Matrizen.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Determinante $\det : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist und folgern Sie, dass die Abbildung $\mathrm{adj} : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, die zu jeder Matrix A die komplementäre Matrix $\mathrm{adj}(A)$ zuordnet, glatt ist. Beweisen Sie die Formel

$$\mathrm{d}_A \det \cdot H = \mathrm{spur}(\mathrm{adj}(A)H) \quad \forall H \in T_A\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}).$$

Hinweis: Die Determinante ist eine multilineare Funktion der Spalten einer Matrix. Wenn $f : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ multilinear ist, können Sie benutzen, dass $d_x f \cdot h = \sum_{i=1}^k f(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_k)$, wobei $x = (x_i)_{i=1}^k$ und $h = (h_i)_{i=1}^k$ zu $(\mathbb{R}^n)^k$ gehören. Verwenden Sie dann die Laplace-Entwicklung der Determinante.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie weiter, dass die Menge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ der invertierbaren $n \times n$ reellen Matrizen eine Lie-Gruppe ist. *Hinweis: Schreiben Sie die Inverse als Funktion der Determinante und der komplementären Matrix.*

Aufgaben nicht zum Abgeben

6-5 Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und M zusammenhängend. Es sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass F konstant genau dann ist, wenn $\mathrm{d}_p F = 0$ für alle $p \in M$.

6-6 Es sei $n \geq 2$ und $H_n \subset GL_n(\mathbb{R})$ die Mengen aller Matrizen $A = (a_{ij})$, wobei

- $a_{ii} = 1, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n,$
- $a_{ij} = 0, \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, n,\ i > j.$

Zeigen Sie, dass H_n eine abgeschlossene Teilmenge und eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$ ist.

Wir versehen nun H_n mit der Teilraumtopologie von $GL_n(\mathbb{R})$. Finden Sie einen Homöomorphismus $\varphi_n : H_n \to \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ und benutzen ihn, um eine glatte Struktur auf H_n zu definieren. Schließen Sie daraus, dass H_n eine Lie-Gruppe ist. Schreiben Sie die Gruppenverknüpfung und die Inversion explizit in der Karte φ_n für $n = 2$ und $n = 3$. Zeigen Sie, dass H_n genau dann als Gruppe isomorph zu $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ mit der Standardaddition ist, wenn $n = 2$.