Differentialgeometrie 2 – Übungszettel 5

Heidelberg, Wintersemester 2019/2020

Gabriele Benedetti Kevin Emanuel Wiegand

5-1 Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie, dass X Killing ist, genau dann wenn $(u_1, u_2) \mapsto g(\nabla^M_{u_1} X, u_2)$ schiefsymmetrisch ist. Folgern Sie daraus, dass die Funktion $t \mapsto g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), X \circ \gamma)$ konstant ist, falls X Killing und $\gamma : (t_0, t_1) \to M$ eine Geodätische ist.

Es sei nun $M = (\theta_0, \theta_1) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ und $g = \mathrm{d}\theta^2 + r^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2$ mit $r : (\theta_0, \theta_1) \to (0, \infty)$ eine Rotationsfläche. Zeigen Sie, dass ∂_ϕ ein Killing-Vektorfeld ist. Folgern Sie daraus:

(a) $r^2(\theta_\gamma)\dot\phi_\gamma$ ist konstant entlang einer Geodätischen $(\theta_\gamma, \phi_\gamma) : (t_0, t_1) \to (r_0, r_1) \times S^1$. Interpretieren Sie dieses Resultat als die Erhaltung des Drehmomentums um die Rotationsachse.

(b) es gilt die Formel $g(\nabla.\partial_\phi, \cdot) = r'(\theta)r(\theta)\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi$. Beweisen Sie dann, dass eine Flusslinie $t \mapsto (\theta_0, \phi_0 + t)$ von ∂_ϕ genau dann eine Geodätische ist, wenn $r'(\theta_0) = 0$.

Es sei nun $(\theta_\gamma, \phi_\gamma) : (t_0, t_1) \to M$ eine maximale Geodätische mit $r^2(\theta_\gamma)\dot\phi_\gamma = c$ und $g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\ddot\theta_\gamma = c^2 \frac{r'}{r^3}(\theta_\gamma), \qquad \dot\phi_\gamma = \frac{c}{r^2(\theta_\gamma)}.$$

Hinweis: nehmen Sie die Zeitableitung von $g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 1$ um zu zeigen, dass $\dot\theta_\gamma(\ddot\theta_\gamma - c^2 \frac{r'}{r^3}) = 0$. Wenn $\ddot\theta_\gamma - c^2 \frac{r'}{r^3} = 0$ nicht überall gilt, finden Sie einen Widerspruch mittels (b). Alternative Lösung: Christoffelsymbole berechnen.

Berechnen Sie $(\theta_\gamma, \phi_\gamma)$ für $c = 0$.

Zeigen Sie für $c > 0$, dass $r(\theta_\gamma(t)) \geq c$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\dot\theta_\gamma(t) = 0$. Es sei nun $[\theta_-, \theta_+] \subset (\theta_0, \theta_1)$, sodass $r(\theta) > c$ für $\theta \in (\theta_-, \theta_+)$ und $r(\theta) = c$ für $\theta = \theta_-, \theta_+$. Skizzieren Sie die Geodätische $(\theta_\gamma, \phi_\gamma)$ unter der Annahme, dass $\theta_\gamma(0) \in (\theta_-, \theta_+)$.

Hinweis: unterscheiden Sie die Fälle, wobei keiner, einer oder beide θ_-, θ_+ kritische Punkte von r sind.

5-2 Mit der Notation der obigen Aufgabe, sei $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = \infty$ und $r(\theta) = (\sin\alpha)\theta$ die Profilkurve des Kegels mit Halbwinkel $\alpha \in (0, \pi/2)$. Für alle $\phi_0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ finden Sie eine Isometrie

$$F : \big(\{(\theta, \phi) \in M \mid \phi \neq \phi_0\}, g\big) \to (V, g_{\mathbb{R}^2}),$$

wobei V die Menge der Vektoren $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist, die einen Winkel β mit der x-Achse einschließen, sodass $\beta \in (0, 2\pi \sin\alpha)$. Es sei γ eine maximale Geodätische für (M, g) mit $r^2(\theta_\gamma)\dot\phi_\gamma \neq 0$. Zeigen Sie, dass γ für alle Zeiten definiert ist und dass γ genau dann eingebettet ist, wenn $\alpha \in [\pi/6, \pi/2)$. *Hinweis: Betrachten Sie die Skizze auf der nächsten Seite. Das Bild der Geodätischen durch F darf immer parallel zur x-Achse angenommen werde (warum?).*

Bonusfragen: können Sie die Anzahl der Selbstschnittpunkte von γ als Funktion von α schreiben? *Erinnerung: $p \in \gamma(\mathbb{R})$ ist ein Selbstschnittpunkt, falls das Urbild $\gamma^{-1}(p)$ mehr als ein Element enthält.*

Ist es möglich, dass $t_1 < t_2 < t_3$ existieren mit $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = \gamma(t_3)$?

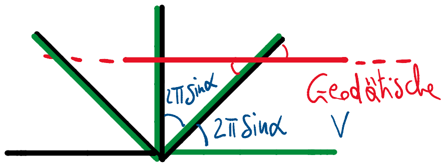

Bild: Eine Skizze von V und seine Drehungen um Vielfachen von $2\pi \sin \alpha$.

Aufgaben zum Vorrechnen

5-3 Es sei (M, g) mit $M = (\theta_0, \theta_1) \times N$ und $g = \pm \mathrm{d}\theta^2 + g^\theta$, wobei $\theta \mapsto g^\theta$ ein Pfad von Riemannschen Metriken ist. Wir setzen $S^\theta \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ als das einzige Tensorfeld mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}g^\theta}{\mathrm{d}\theta} = g^\theta(S^\theta \cdot, \cdot).$$

Wir schreiben ∇^θ für die LC-Ableitung von (N, g^θ). Für $\theta \mapsto X^\theta \in \mathfrak{X}(N)$ bezeichnet $(X^\theta)^h \in \mathfrak{X}(M)$ das einzige Vektorfeld, sodass $\mathrm{d}\pi_1 \cdot (X^\theta)^h = 0$ und $\mathrm{d}_{\theta,p}\pi_2 (X^\theta)^h = X^\theta(p)$, wobei $\pi_1 : M \to (\theta_0, \theta_1)$ und $\pi_2 : M \to N$ die Projektionen sind. Zeigen Sie, dass ∇^M das einzige Element in $\mathrm{kA}(TM)$ ist, sodass für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$:

$$\begin{cases} \nabla^M_{\partial_\theta} \partial_\theta = 0 \\ \nabla^M_{X^h} \partial_\theta = (S^\theta \cdot X)^h \\ \nabla^M_{\partial_\theta} Y^h = (S^\theta \cdot Y)^h \\ \nabla^M_{X^h} Y^h = \nabla^\theta_X Y \mp g^\theta(S^\theta \cdot X, Y)\partial_\theta. \end{cases}$$

Hinweis: für die ersten zwei Gleichungen benutzen Sie Aufgabe 4-2(iii). Für die dritte Gleichung benutzen Sie, dass $[Y^h, \partial_\theta] = 0$.

Finden Sie S^θ, falls $g^\theta = r^2(\theta) g^N$ ist, wobei g^N eine feste Riemannsche Metrik auf N darstellt.

5-4 Ein Großkreis auf $(S^n_r, g_{S^n_r})$ ist die Schnittmenge zwischen S^n_r und einer zweidimensionalen Ebene in $\mathbb{R}^{n+1}$ durch den Ursprung. Zeigen Sie, dass eine Parametrisierung mit konstanter Geschwindigkeit eines Großkreises eine Geodätische für $(S^n_r, g_{S^n_r})$ ist. Zeigen Sie, dass für alle $p \in S^n_r$ und $v \in T_p S^n_r$ ein Großkreis C existiert mit $p \in C$ und v tangential zu C, sodass Großkreise genau die Geodätischen auf S^n_r sind.

Hinweis: benutzen Sie den Satz über die LC-Ableitung von isometrischen Immersionen.

Beweisen Sie ähnliche Aussagen für $(H^n_r, g_{H^n_r})$ und ihre Schnittmenge mit Ebenen in $\mathbb{R}^{n,1}$ durch den Ursprung. *Hinweis: betrachten Sie die Kurve*

$$t \mapsto \cosh\left(\frac{|v|_{H^n_r} t}{r}\right) p + \sinh\left(\frac{|v|_{H^n_r} t}{r}\right) \frac{rv}{|v|_{H^n_r}}.$$