Differentialgeometrie 1 – Übungszettel 5

Heidelberg, Sommersemester 2019

Gabriele Benedetti Urs Fuchs

Abgabe bis 23.5.2019 um 16 Uhr, Briefkasten 04 im 1.OG, Mathematikon

Aufgaben zum Abgeben

5-1 (a) (2 Punkte) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und U eine offene Teilmenge von M. Zeigen Sie, dass das Differential $\mathrm{d}_p\iota : T_pU \to T_pM$ der Inklusion $\iota : U \to M$ für alle $p \in U$ ein linearer Isomorphismus ist.

(b) (1 Punkt) Es sei $F : M \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass $\mathrm{d}_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ ein linearer Isomorphismus ist.

5-2 Es seien M_1 und M_2 glatte Mannigfaltigkeiten und $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ beliebig.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\iota^{p_2} : M_1 \to M_1 \times M_2, \quad \iota^{p_2}(p) = (p, p_2), \quad \forall\, p \in M_1$$
$$\iota_{p_1} : M_2 \to M_1 \times M_2, \quad \iota_{p_1}(p) = (p_1, p), \quad \forall\, p \in M_2.$$

Einbettungen sind. Zeigen Sie außerdem, dass diese Abbildungen einen linearen Isomorphismus

$$T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2 \to T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2)$$

induzieren.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Projektionen $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ und $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ Submersionen sind.

5-3 (3 Punkte) Zeigen Sie, dass es keine Einbettung $\iota : M \to \mathbb{R}^2$ von einer glatten Mannigfaltigkeit gibt, sodass

$$\iota(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für eine glatte Kurve

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}, \quad \gamma(0) = (0, 0)$$

die Relation $\dot\gamma(0) = (0, 0)$ gilt, indem Sie die Definition der Differenzierbarkeit (siehe Formel (1.1) im Skript) von $t \mapsto x(t)$ und $t \mapsto y(t)$ in $t = 0$ benutzen, wobei $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

5-4 (3 Punkte) Es sei $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(\theta_1, \theta_2) = \big((\cos 2\pi\theta_2)(2 + \cos 2\pi\theta_1), (\sin 2\pi\theta_2)(2 + \cos 2\pi\theta_1), \sin 2\pi\theta_1\big).$$

Finden Sie eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sodass $F(\mathbb{T}^2) = f^{-1}(0)$ und machen Sie eine Skizze von $F(\mathbb{T}^2)$, sowie der Kurven $F(\{\theta_1^*\} \times \mathbb{T}^1)$ und $F(\mathbb{T}^1 \times \{\theta_2^*\})$ für alle $(\theta_1^*, \theta_2^*) \in \mathbb{T}^2$. Zeigen Sie anschließend, dass F eine Einbettung ist.

Aufgaben nicht zum Abgeben

5-5 Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung ein Diffeomorphismus ist:

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to (0, +\infty) \times S^n, \quad x \mapsto \left(|x|, \frac{x}{|x|}\right).$$

Schließen Sie daraus, dass die Inklusion von S^n_r in $\mathbb{R}^{n+1}$ eine Einbettung und die Projektion $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$, $x \mapsto x/|x|$ eine Submersion ist.

5-6 Es sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und betrachten Sie die Abbildung

$$\iota_v : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2, \qquad \iota_v(t) = [tv].$$

Zeigen Sie, dass ι_v glatt ist und dass ihr Differential injektiv in allen Punkten ist. Für welche Vektore v ist ι_v injektiv? Ist für diese Vektoren ι_v auch eine Einbettung? Falls ι_v nicht injektiv ist, zeigen Sie, dass es eine Einbettung $\jmath_v : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^2$ gibt, sodass $\jmath_v(\mathbb{T}^1) = \iota_v(\mathbb{R})$.

5-7 Es sei $\mathrm{Sym}_{n+1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ der Vektorraum der reellen symmetrischen $(n+1) \times (n+1)$-Matrizen. Betrachten Sie die Veronese Abbildung

$$V : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathrm{Sym}_{n+1}(\mathbb{R}), \qquad V(x)_{ij} = x_i x_j.$$

Schreiben Sie die Matrix $V(x)$ für $n = 2$ explizit. Zeigen Sie, dass die Abbildung $V \circ \iota : S^n \to \mathrm{Sym}_{n+1}(\mathbb{R})$ glatt ist und dass sie eine glatte Abbildung $F : \mathbb{RP}^n \to \mathrm{Sym}_{n+1}(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $F \circ \pi = V \circ \iota$ induziert, wobei $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ in dem Aufgabezettel 3 definiert wurde. Zeigen Sie, dass F eine Einbettung ist.

5-8 Die obige Aufgabe liefert eine Einbettung von $\mathbb{RP}^2$ in $\mathbb{R}^6$. Man kann die reell projektive Ebene aber schon in $\mathbb{R}^4$ einbetten. Zeigen Sie, dass

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \qquad F(x) = (x_1^2 - x_2^2, x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4)$$

eine solche Einbettung induziert.