Differentialgeometrie 1 – Übungszettel 4

Heidelberg, Sommersemester 2019

Gabriele Benedetti   Urs Fuchs

Abgabe bis 16.5.2019 um 16 Uhr, Briefkasten 04 im 1.OG, Mathematikon

Aufgaben zum Abgeben

4-1 (2 Punkte) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$ eine offene Überdeckung von M. Wir setzen $N := U_1 \cup U_2$. Es sei nun $\mathcal{R} = \{\rho_1, \rho_2\}$ eine Zerlegung der Eins auf N bezüglich der Überdeckung $\{U_1, U_2\}$ und $\mathcal{S} = \{\sigma_{12}, \sigma_3\}$ eine Zerlegung der Eins auf M bezüglich der Überdeckung $\{N, U_3\}$. Benutzen Sie $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$, um eine Zerlegung der Eins auf M bezüglich $\mathcal{U}$ zu konstruieren.

4-2 (5 Punkte) Es sei $\mathbb{CP}^n$ der komplexe projektive Raum, nämlich $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, wobei $z \sim w$ genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z = \lambda w$ existiert. Man kann zeigen, dass $\mathbb{CP}^n$ mit der Quotiententopologie ein kompakter Hausdorff Raum ist mit abzählbarer Basis (Sie können dies hier ohne Beweis verwenden, siehe Aufgabe 4-7 (a)).
(a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\varphi_i : \mathbb{CP}^n \backslash \{z_i = 0\} \to \mathbb{C}^n, \quad \varphi_i([z_0 : \ldots : z_n]) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$

für $i = 0, \ldots, n$ einen Atlas auf $\mathbb{CP}^n$ definieren.

(b) Es seien $P, Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ homogene Polynome zwei komplexer Variablen mit $\mathrm{Grad} P = \mathrm{Grad} Q$ und sodass $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ die einzige gemeinsame Nullstelle von P und Q ist. Zeigen Sie, dass

$$G : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1, \qquad G([z_0 : z_1]) = [P(z_0, z_1) : Q(z_0, z_1)]$$

eine wohldefinierte glatte Abbildung ist. Wann ist G ein Diffeomorphismus?

4-3 (5 Punkte) Es sei $F : M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, sodass die Zuordnung $f \mapsto f \circ F$ eine wohldefinierte Abbildung $F^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ definiert. Mit anderen Worten, es gelte:

$$f \in C^\infty(N) \quad \Longrightarrow \quad f \circ F \in C^\infty(M).$$

(a) Beweisen Sie, dass $F : M \to N$ glatt ist.

(b) Es sei $F : M \to N$ zusätzlich bijektiv und offen, sowie die induzierte Abbildung $F^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ eine Bijektion. Zeigen Sie: F ist ein Diffeomorphismus.

Aufgaben nicht zum Abgeben

4-4 Es sei $M = (0,3) \times (0,3) \subset \mathbb{R}^2$. Finden Sie eine Zerlegung der Eins auf M bezüglich

$$\big\{(0,2) \times (0,3),\ (1,3) \times (0,3)\big\}.$$

Finden Sie eine Zerlegung der Eins auf M bezüglich der Überdeckung

$$\big\{(0,2) \times (0,2),\ (1,3) \times (0,2),\ (0,3) \times (1,3)\big\}.$$

4-5 Es sei $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ die Karte $z \mapsto (\Re z, \Im z)$, die den reellen und imaginären Teil wiedergibt. Schreiben Sie die Abbildungen

$$\begin{aligned} \gamma &: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, & \gamma(z) &= \bar{z}, \\ \mu &: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, & \mu(z,w) &= zw, \\ \iota &: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, & \iota(z) &= 1/z, \end{aligned}$$

die die komplexe Konjugation, die complexe Multiplikation und die komplexe Inverse darstellen, in diesen Koordinaten. Zeigen Sie dazu, dass γ, μ und ι glatt sind.

4-6 Es sei $\sigma_{\text{Nord}} : S^n \setminus \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion aus dem Nordpol $e_{n+1} \in S^n$, wobei $\sigma_{\text{Nord}}(x)$ die Eigenschaft hat, dass e_{n+1}, x und $(\sigma_{\text{Nord}}(x), 0)$ kollinear in $\mathbb{R}^{n+1}$ sind. Zeigen Sie, dass σ_{Nord} eine Karte ist. Es sei $\sigma_{\text{Sud}} : S^n \setminus \{-e_{n+1}\}$ die stereographische Projektion aus dem Südpol. Zeigen Sie, dass $\{\sigma_{\text{Nord}}, \sigma_{\text{Sud}}\}$ einen Atlas auf S^n liefert. Zeigen Sie, dass die Übergangsabbildung für $n = 2$ in komplexen Koordinaten durch

$$\sigma_{\text{Sud}} \circ \sigma_{\text{Nord}}^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad z \mapsto 1/\bar{z}$$

dargestellt werden kann.

4-7 (a) Beweisen Sie, dass der komplex projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ aus Aufgabe 4-2 versehen mit der Quotiententopologie ein kompakter, Hausdorff topologischer Raum mit abzählbarer Basis ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F : \mathbb{CP}^1 \to S^2, \qquad F([z_0 : z_1]) = \begin{cases} \sigma_{\text{Nord}}^{-1}(z_0/z_1) & \text{falls } [z_0 : z_1] \neq [1:0], \\ e_3 & \text{falls } [z_0 : z_1] = [1:0] \end{cases}$$

ein Diffeomorphismus ist, wobei $\sigma_{\text{Nord}}^{-1}$ die stereographische Projektion aus dem Nordpol ist (siehe Aufgabe 4-6).

(c) Es seien $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplexe Polynome einer komplexen Variable ohne gemeinsame Nullstellen, die nicht unbedingt den selben Grad haben. Es sei

$$g : \mathbb{C} \setminus \{q = 0\} \to \mathbb{C}, \qquad g(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Zeigen Sie, dass eine eindeutige glatte Abbildung $G : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ existiert, die g erweitert: $G([z:1]) = [g(z):1]$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{q = 0\}$. Berechnen Sie $G([z:1])$ für $z \in \{q = 0\}$ und $G([1:0])$.