Differentialgeometrie 1 – Übungszettel 3

Heidelberg, Sommersemester 2019

Gabriele Benedetti   Urs Fuchs

Abgabe bis 9.5.2019 um 16 Uhr, Briefkasten 04 im 1.OG, Mathematikon

Aufgaben zum Abgeben

3-1 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F : \mathbb{T}^1 \to S^1, \qquad F([x]) = \big(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)\big)$$

ein Diffeomorphismus ist. Sie dürfen das Kriterium in Aufgabe 3.24 im Skript ohne Beweis benutzen. In diesem Sinn können wir $\mathbb{T}^1$ als die Menge der Winkel (bis auf der Streckung von 2π) interpretieren.

3-2 (6 Punkte) Wir definieren auf $\mathbb{R}^2$ die Relation

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \iff \quad \exists\, q \in \mathbb{Z},\ x' - x = q,\ y' = (-1)^q y.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation und dass die Quotientenabbildung $\pi : \mathbb{R}^2 \to M := \mathbb{R}^2/\sim$ offen ist. Wir betrachten für jedes $t \in \mathbb{R}$ das Paar (U_t, φ_t), wobei $U_t := \{[(x, y)] \in M \mid x - t \notin \mathbb{Z}\}$ und

$$\varphi_t : U_t \to (t, t + 1) \times \mathbb{R}, \quad \varphi([x, y]) = (x, y).$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_M := \{(U_t, \varphi_t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ein Atlas auf M ist. Schließlich zeigen Sie: M ist ein hausdorffscher Raum mit abzählbarer Basis. Daher ist $(M, [\mathcal{A}_M])$ eine glatte Mannigfaltigkeit, das sogenannte Möbiusband.

3-3 (2 Punkte) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\varphi : U \to U$ ein Homöomorphismus. Sind die glatten Mannigfaltigkeiten

$$\Big(U, \big[\{(U, \mathrm{id}_U)\}\big]\Big), \qquad \Big(U, \big[\{(U, \varphi)\}\big]\Big)$$

diffeomorph oder nicht? Begründen Sie bitte Ihre Aussage.

Zusatz: Nehmen Sie allgemeiner an, dass $\varphi : U \to V$ ein Homöomorphismus mit $V \neq U$ ist. Was passiert in diesem Fall?

Aufgaben nicht zum Abgeben

3-4 Es sei $\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ die glatte Mannigfaltigkeit, die wir in Aufgabe 2-5 definiert haben. Zeigen Sie, dass

$$\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n, \qquad \pi(x_0, \dots, x_n) = [x_0 : \ldots : x_n]$$

eine glatte Abbildung ist, die ein lokaler Diffeomorphismus ist.

3-5 Zeigen Sie, dass die folgende Funktion wohldefiniert und glatt ist:

$$f : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{R}, \qquad f([x_0 : \ldots : x_n]) = \frac{\sum_{j=0}^n j x_j^2}{\sum_{j=0}^n x_j^2}.$$

3-6 Es seien M_1, M_2 glatte Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie: die Projektionen $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ und $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ sind glatt. Es sei nun L eine weitere glatte Mannigfaltigkeit und $F : L \to M_1 \times M_2$ eine Abbildung. Zeigen Sie: F ist glatt genau dann, wenn $\pi_1 \circ F$ und $\pi_2 \circ F$ glatt sind.