Differentialgeometrie 2 – Übungszettel 2

Heidelberg, Wintersemester 2019/2020

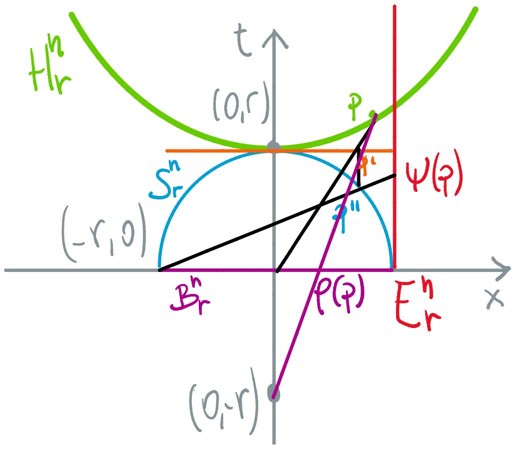
Gabriele Benedetti Kevin Emanuel Wiegand

2-1 Ein Diffeomorphismus $F : (N, g_N) \to (M, g_M)$ heißt konform, wenn F^*g_M konform äquivalent zu g_N ist, d.h. $F^*g_M = \lambda^2 \cdot g_N$ für $\lambda : N \to (0,\infty)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Diffeomorphismen konform sind und bestimmen Sie den konformen Faktor λ:

(a) die Streckung $\nu_a : (\mathbb{R}^n, g_{(\sigma_+,\sigma_-)}) \to (\mathbb{R}^n, g_{(\sigma_+,\sigma_-)})$ vom Faktor $a > 0$, wobei $\nu_a(p) = a \cdot p$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$;

(b) die Inverse $\sigma^{-1} : (\mathbb{R}^n, g_{\text{euk}}) \to (S^n_r \setminus \{re_{n+1}\}, g_{S^n_r})$ der stereographischen Projektion σ der Sphäre von Radius r aus dem Nordpol re_{n+1}. *Erinnerung: $\sigma(p)$ ist der eindeutige Punkt in $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, der kollinear zum Nordpol re_{n+1} und p steht.*

(c) die Inverse $\rho^{-1} : (B^n_r, g_{\text{euk}}) \to (H^n_r, g_{H^n_r})$ der stereographischen Projektion des hyperbolischen Raums von Radius r aus dem Südpol $-re_{n+1}$. *Erinnerung: $\rho(p)$ ist der eindeutige Punkt auf dem offenen euklidischen Ball $B^n_r \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von Radius r, der kollinear zum Südpol $-re_{n+1}$ und p steht.*



Die Abbildungen Ψ und ρ in Aufgabe 2-1 und 2-2.

2-2 Wir betrachten die Zerlegung $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ mit entsprechenden Koordinaten (x, y, t). Wir betrachten die halbe Hyperebene $E^n_r := \{r\} \times \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Wir definieren eine Abbildung $\Psi : H^n_r \to E^n_r$ auf folgender Weise. Für $p \in H^n_r$ nehmen wir den eindeutigen Schnittpunkt p' zwischen der Hyperebene $\{t = r\}$ und der von p aufgespannten Gerade. Es sei weiter p'' die Projektion von p' in die t-Richtung auf die Hemisphäre $S^n_r \cap \{t > 0\}$. Dann $\Psi(p)$ ist der eindeutige Punkt auf E^n_r, der kollinear zu $(-r, 0, 0)$ und p'' steht. Zeigen Sie, dass unter der Identifizierung $E^n_r \cong \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$ gilt für alle $(x, y, t) \in H^n_r$ und $(z, s) \in E^n_r$:

$$\Psi(x, y, t) = \frac{2r}{t + x}(y, r), \qquad \Psi^{-1}(z, s) = \Big(\frac{r^2}{s} - \frac{a(z, s)}{4}, \frac{rz}{s}, \frac{r^2}{s} + \frac{a(z, s)}{4}\Big),$$

wobei $a(z, s) := \frac{1}{s}|z|^2_{\text{euk}} + s$. Zeigen Sie, dass $\Psi^{-1} : (E^n_r, g_{\text{euk}}) \to (H^n_r, g_{H^n_r})$ konform ist und bestimmen Sie den konformen Faktor.

Aufgaben zum Vorrechnen

2-3 (a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, g_{(\sigma_+,\sigma_-)})$ und $(Q^{-1}_{(\sigma_+,\sigma_-)}(c), \iota_c^* g_{(\sigma_+,\sigma_-)})$ für $c \neq 0$ Rahmen-homogen sind. *Hinweis: Benutzen Sie Beispiele 3.17, 3.31 und 3.32.*

(b) Finden Sie Diffeomorphismen

$$
\begin{aligned}
F_1 &: (0,\infty) \times S_1^{n-1} \to (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, g_{\text{euk}}),\\
F_2 &: (0,\pi r) \times S_1^{n-1} \to (S_r^n \setminus \{re_{n+1}, -re_{n+1}\}, g_{S_r^n})\\
F_3 &: (0,\infty) \times S_1^{n-1} \to (H_r^n \setminus \{re_{n+1}\}, g_{H_r^n}),
\end{aligned}
$$

sodass die Pullback-Metrik ein verzerrtes Produkt zwischen der euklidischen Metrik auf einem Intervall und $g_{S_1^{n-1}}$ ist. *Hinweis: Polarkoordinaten.*

2-4 Es sei (M,g) eine PR-Mannigfaltigkeit. Es seien $f : M \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$, sodass $g_p(\operatorname{grad} f(p), \operatorname{grad} f(p)) \neq 0$ für alle $p \in N := f^{-1}(c)$.

(a) Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion $\Pi : TM|_N \to TN$ durch

$$\Pi_p \cdot v = v - \frac{g_p(v, \operatorname{grad} f(p))}{g_p(\operatorname{grad} f(p), \operatorname{grad} f(p))} \operatorname{grad} f(p), \qquad \forall\, p \in M,\ \forall\, v \in T_pM,$$

gegeben ist. Hier bezeichnet $TM|_N$ den Pullback von TM auf N und wir identifizieren TN mit einem Unterbündel von $TM|_N$.

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben als $f(x,y,z) = z - \zeta(x,y)$ für eine Funktion $\zeta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Es sei $N = f^{-1}(0)$. Schreiben Sie die Darstellung der orthogonalen Projektion $\Pi : T\mathbb{R}^3|_N \to TN$ bezüglich der Rahmen $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ von $T\mathbb{R}^3|_N$ und ∂_u, ∂_v von TN. Hier bezeichnen ∂_u und ∂_v die Koordinatenvektorfelder der Parametrisierung $\iota : \mathbb{R}^2 \to N$, $\iota(u,v) = (u, v, \zeta(u,v))$ von N.