Differentialgeometrie 1 – Übungszettel 2

Heidelberg, Sommersemester 2019

Gabriele Benedetti Urs Fuchs

Abgabe bis 2.5.2019 um 16 Uhr, Briefkasten 04 im 1.OG, Mathematikon

Auf diesem Aufgabenblatt sind Teilmengen von topologischen Räumen immer mit der Teilraumtopologie versehen und $\mathbb{R}^n$ ist immer mit der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie versehen.

Aufgaben zum Abgeben

2-1 (6 Punkte) Wir definieren auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ eine Relation gegeben durch $x \sim y :\Leftrightarrow y = \lambda x$ für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Relation $\sim'$ gegeben durch $x \sim' y :\Leftrightarrow x = \pm y$.
Zeigen Sie, dass die Quotientenräume $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ und $S^n/\sim'$ eine abzählbare Basis besitzen, sowie dass sie Hausdorff und kompakt sind.
Beweisen Sie ausserdem, dass die Inklusion $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ einen Homöomorphismus zwischen diesen beiden Quotientenräumen induziert.

2-2 (3 Punkte) Benutzen Sie die Karten $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$ für S^n aus der Vorlesung um zu zeigen, dass der topologische Raum $S^n/\sim'$ aus der Aufgabe 2-1 eine differenzierbare Struktur hat.
Zeigen Sie dazu, dass die Einschränkung $\pi|_{U_i^+}$ der kanonischen Projektion $\pi : S^n \to S^n/\sim'$ auf U_i^+ injektiv ist und beweisen Sie, dass die Abbildungen $\overline{\varphi}_i^+ := \varphi_i^+ \circ (\pi|_{U_i^+})^{-1} : \pi(U_i^+) \to B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ kompatible Karten sind.

2-3 (3 Punkte) Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $M_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - x + a = y^2\}$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat M_a die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit?

Aufgaben nicht zum Abgeben

2-4 Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge mit nicht-leerem Inneren und es sei N eine beliebige n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass jedes $x \in N$ eine Umgebung hat, welche homöomorph zu D ist.
Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zuerst für $D = B_1(0)$ und dann für $D = \mathbb{R}^n$.

2-5 Für einen Punkt $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ schreiben wir $[x_0 : \ldots : x_n]$ für sein Bild in $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$. Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\varphi_j : \Big((\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim\Big) \setminus \{x^j = 0\} \to \mathbb{R}^n,$$
$$\varphi_j([x_0 : \ldots : x_n]) = \Big(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\Big)$$

für $j = 0, \ldots, n$ eine differenzierbare Struktur auf $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ definieren. Beweisen Sie, dass der Homöomorphismus aus Aufgabe 2-1 diese differenzierbare Struktur identifiziert mit der differenzierbaren Struktur aus Aufgabe 2-2. Man bezieht sich zu beiden $S^n/\sim'$ und $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ mit den jeweiligen glatten Strukturen als der reell projektive Raum $\mathbb{RP}^n$.