Differentialgeometrie 2 – Übungszettel 1

Heidelberg, Wintersemester 2019/2020

Gabriele Benedetti Kevin Emanuel Wiegand

Wenn Sie wollen, können sie Aufgaben in Gabrieles Briefkasten auf dem 3.OG. vor dem mathematischen Sekretariat abgeben.

1-1 Es seien g_1 und g_2 zwei (positiv definite) Skalarprodukte auf einem reellen Vektorraum V. Zeigen Sie: g_1 und g_2 sind konform äquivalent genau dann, wenn g_1 und g_2 dieselben unorientierten Winkel bestimmen. Zur Erinnerung: Konform äquivalent heißt

$$\exists\, f > 0, \quad g_2 = f^2 \cdot g_1$$

und der von $u, v \in V \setminus \{0\}$ eingeschlossene unorientierte Winkel $\theta \in [0, \pi]$ bezüglich eines Skalarprodukt g auf V ist gegeben durch

$$\cos\theta := \frac{g(u,v)}{|u|_g |v|_g}.$$

Hinweis: für die schwierige Richtung betrachte man den von $u-v$ und $u+v$ eingeschlossenen Winkel für linear unabhängige $u, v \in V$ und man nehme dann eine orthonormale Basis für g_1.

1-2 Es sei U eine offene Menge des $\mathbb{R}^2$ und $z : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Betrachten Sie die Einbettung $\iota : U \to \mathbb{R}^3$, $\iota(u,v) = (u, v, z(u,v))$. Finden Sie die Matrixdarstellung der Riemannschen Metrik $g := \iota^* g_{\mathrm{euk}}$ auf U und des zugehörigen Operators $\sharp : T^*U \to TU$ bezüglich des Rahmens $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$.

Es sei nun $g_{(1,2)} = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$ die Minkowski-Metrik auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Matrixdarstellung von $\iota^* g_{(1,2)}$. Wann ist $\iota^* g_{(1,2)}$ eine Riemannsche Metrik auf U?

1-3 Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir schreiben $\operatorname{grad} f = \sharp(\mathrm{d}f)$ für den Gradienten von f. Berechnen Sie die Koordinatendarstellung von $\operatorname{grad} f$ in einer Karte (U, φ) von M.

Wir betrachten nun eine nicht leere Niveaumenge $N := f^{-1}(c)$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass N eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 ist, falls $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$ für alle $p \in N$. Zeigen Sie zusätzlich, dass $\operatorname{grad} f(p)$ senkrecht zu T_pN für alle $p \in N$ steht.

Berechnen Sie schließlich den Gradienten der Koordinatenfunktion u bezüglich $\iota^* g_{\mathrm{euk}}$ in Aufgabe 1-2.

Aufgaben zum Vorrechnen

1-4 Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine stückweise glatte Kurve $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ heißt minimierend, wenn $L_g(\gamma) = d_g(\gamma(t_0), \gamma(t_1))$. Zeigen Sie: wenn γ minimierend ist, sind die Einschränkungen $\gamma|_{[t_0,t]}$ und $\gamma|_{[t,t_1]}$ minimierend für alle $t \in [t_0, t_1]$.